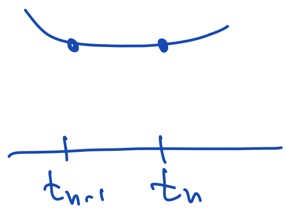
05/12/2023

Metodo di Eulero all'indietro (o E. implicito)

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in (t_0, T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$$y'(t_n) = \frac{y(t_n) - y(t_{n-1})}{\underbrace{t_n - t_{n-1}}_{h}} + \frac{h}{2}\, y''(\xi_n)$$

diff. finite all'indietro



Scrivo l'eqz diff in t_n

$$\frac{y(t_n) - y(t_{n-1})}{h} + \underbrace{\frac{h}{2}\, y''(\xi_n)}_{\text{voglio eliminarlo}} = f(t_n, y(t_n))$$

Introduco la sol numerica u

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{h} = f(t_n, u_n)$$

$$u_n = u_{n-1} + h\, f(t_n, u_n)$$

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h\, f(t_{n+1}, u_{n+1}) \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

Metodo di Eulero all'indietro (o implicito)

Eulero in avanti

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h\, f(t_n, u_n) \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

Metodo implicito = metodo in cui l'incognita u_{n+1} non è esplicitata rispetto al resto dell'eqz

Es: $\begin{cases} y'(t) = \boxed{t^2 \cdot \cos(y(t)-1)} & t>0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

$f(t, y(t))$

EE: $u_{n+1} = u_n + h f(t_n, u_n) = u_n + h\, t_n^2 \cdot \cos(u_n - 1)$

EI: $u_{n+1} = u_n + h f(t_{n+1}, u_{n+1}) = u_n + h\, t_{n+1}^2 \cdot \cos(u_{n+1} - 1)$

è un' eqz con incognita u_{n+1}

$$u_{n+1} = \underbrace{u_n + h\, t_{n+1}^2 \cdot \cos(u_{n+1} - 1)}$$

$$\underbrace{u_{n+1}}_{x} = \varphi(u_{n+1})$$

$$x = \varphi(x) \qquad \text{eqz di punto fisso}$$

se conosco $f(t, y(t)) \Rightarrow$ posso costruire

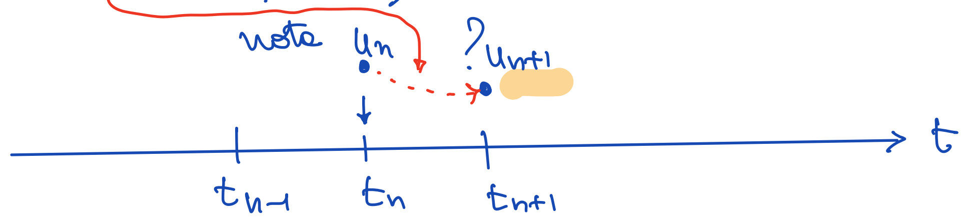
$$\varphi(x) = u_n + h\, t_{n+1}^2 \cos(x-1)$$

più in generale $\underset{x}{u_{n+1}} = \underbrace{u_n + h f(t_{n+1}, \underset{x}{u_{n+1}})}_{\varphi(u_{n+1})}$

per risolvere $x = \varphi(x)$

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ dato} \\ x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}) & k \geq 0 \end{cases}$$

metodo di pto fisso



posso prendere $x^{(0)} = u_n$

Ricordando Ostrowski ho che la succ

$x^{(k)} \to x = u_{n+1}$ se $|\varphi'(u_{n+1})| < 1$

? $\varphi'(u_{n+1})$ = derivata di φ rispetto a u_{n+1}

$$\varphi(u_{n+1}) = u_n + h f(t_{n+1}, u_{n+1})$$

$$\varphi'(u_{n+1}) = 0 + h \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(t_{n+1}, u_{n+1})$$

2ª variabile di f

$$|\varphi'(u_{n+1})| < 1 \iff \underbrace{h \cdot \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t_{n+1}, u_{n+1}) \right| < 1}_{\text{è soddisfatta se } h \text{ è suff piccolo}}$$

$$h < \frac{1}{\left| \frac{\partial f}{\partial y}(t_{n+1}, u_{n+1}) \right|}$$

richiesta dettata dal metodo di pto fisso.

Alternativa:

$$u_{n+1} = u_n + h f(t_{n+1}, u_{n+1})$$

$$\underbrace{\overset{x}{u_{n+1}} - u_n - h f(t_{n+1}, \overset{x}{u_{n+1}})}_{r(u_{n+1})} = 0$$

$= 0$

eqz non lineare risolubile con Newton, secanti, bisezione

Se utilizzo secanti, servono 2 pti

$$\begin{cases} x^{(0)} = u_n \\ x^{(1)} = u_{n-1} \quad \text{a patto che } n \geq 1, \text{ mentre se } n=0 \; x^{(1)} = u_n + h \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{r(x^{(k)})}{\dfrac{r(x^{(k)}) - r(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}} \qquad k \geq 1 \end{cases}$$

Algoritmo di EI con secanti

Input : f, $[t_0, T]$ (tspan), y_0, N_h (= n° passi temporali)

tol, kmax per secanti

Output: tn = vett. dei tempi

un = vett soluzione

```
tn = linspace( ...... )'
un = zeros( .... )
un(1) = y0          (u0)
r = @(x) x - un(1) - h * f(tn(2), x)
[zero, .... ] = secanti (r, un(1), un(1)+h,
                         tol, kmax )
un(2) = zero
for n = 2 : Nh - 1
  r = @(x) x - un(n) - h * f(tn(n+1), x)
  [zero....] = secanti (r, un(n), un(n-1),
```

tol, kmax)

un(n+1) = zero
end

Metodo di Crank-Nicolson

riparto da $y'(t) = f(t, y(t))$

integro su $[t_n, t_{n+1}]$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\,dt$$

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\,dt =$$

$$= \frac{[f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))]}{2} \cdot h - \underbrace{\frac{h^3}{12} \cdot y'''(\xi_n)}_{\text{errore da eliminare dalla formula}}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})\right]$$

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})\right] & n \geq 0 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

Metodo di Crank-Nicolson (o dei trapezi) è implicito.

Metodo di Heun

parto da CN, voglio eliminare il carattere implicito.

1 - previsione della soluzione (PREDICTOR)

$$\tilde{u}_{n+1} = u_n + h f(t_n, u_n) \quad (EE)$$

2 - correzione di $\tilde{u}_{n+1}$ con CN (CORRECTOR)

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1})\right] \quad (CN)$$

in questo modo non ho eqz non lin da risolvere

Heun
$$\begin{cases} u_0 = y_0 \\ \tilde{u}_{n+1} = u_n + h f(t_n, u_n) \\ u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1})\right] \end{cases} \quad n \geq 0$$

tecnica dei metodi PREDICTOR-CORRECTOR

Def: Metodo a un passo è un metodo che richiede la conoscenza solo di u_n per calcolare u_{n+1}.

Def Metodo convergente.

Un metodo per l'appx di e.d.o. è convergente se $\exists\ c(h)$ funzione infinitesima per $h \to 0$ t.c.

$$\max_{0 \le n \le N_h} |y(t_n) - u_n| \le c(h).$$

Se inoltre $\exists\ C > 0$ e $q > 0$ t.c.

$$c(h) = C \cdot h^q$$

allora il metodo si dice convergente di ordine q rispetto ad h.

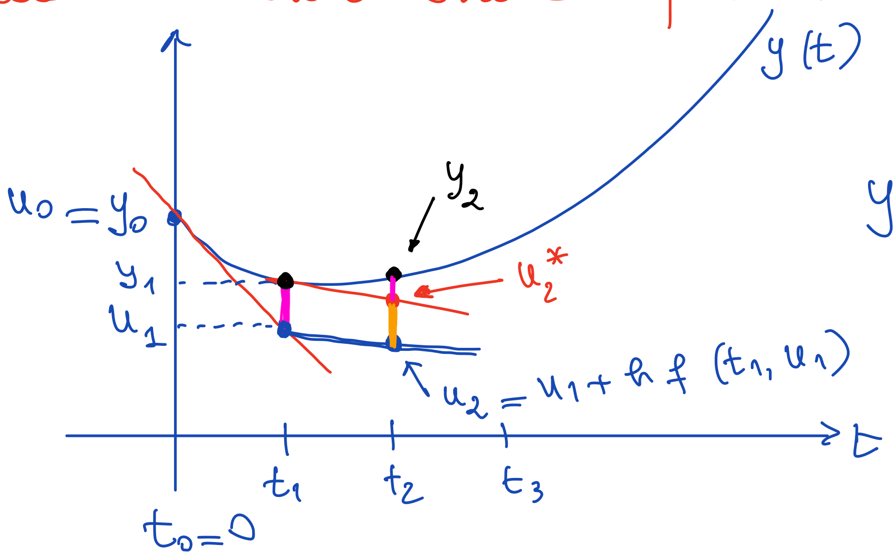
Si dimostra che

EE e EI sono convergenti di ordine 1

CN e Heun sono convergenti di ordine 2

A parità di h, mi aspetto che la sol di CN e Heun sia + accurata rispetto a quella dei metodi di Eulero

Analisi dell'errore per EE



$$y_n = y(t_n)$$

$$u_1 = \underbrace{u_0}_{y_0} + h \underbrace{f(t_0, u_0)}_{y'(t_0)}$$

? $|y_1 - u_1|$ errore

per Taylor

$$y_1 = \underbrace{y_0}_{u_0} + h \overbrace{y'(t_0)}^{f(t_0,\, y_0)} + \frac{h^2}{2} y''(\xi_1)$$

$$\underset{u_1^*}{\underset{\parallel}{|y_1 - u_1|}} = \frac{h^2}{2} \left| y''(\xi_1) \right|$$

errore dovuto al troncamento dello sviluppo di Taylor (legato all'appx di y')

$$y_2 - u_2 = (y_2 - u_2^*) + (u_2^* - u_2)$$

$$|y_2 - u_2| \leq |y_2 - u_2^*| + |u_2^* - u_2|$$

$$\underbrace{\qquad}_{1^\circ} \qquad \underbrace{\qquad}_{2^\circ}$$

$$|y_2 - u_2^*| = \frac{h^2}{2} |y''(\xi_2)|$$

è della stessa natura dell'errore $|y_1 - u_1|$ dovuto al troncamento dello sviluppo, cioè all'appx della y'

$|u_2^* - u_2|$ è un errore figlio dell'errore al passo precedente

$$t_n : \quad \boxed{|y_n - u_n| \leq \underbrace{|y_n - u_n^*|}_{1^\circ} + \underbrace{|u_n^* - u_n|}_{2^\circ}}$$

con u_n^* = sol ottenuta se conoscessi la y_{n-1} esatta

1° errore generato dall'aver appx y' al passo t_n — CONSISTENZA

2° errore figlio di tutti gli errori ai passi prima — STABILITA'

<u>Def</u> : $\tau_n(h) = \dfrac{y_n - u_n^*}{h}$ errore di troncamento locale

Def : $\tau(h) = \max\limits_{0 \le n \le N_h} |\tau_n(h)|$ errore di troncamento globale

Def : Un metodo (per l'appx di e.d.o) è CONSISTENTE se $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = 0$

(sto appx correttam. y' o $\int$)

EE : $\tau(h) = \frac{h^2}{2} \|y''\|_\infty \cdot \frac{1}{h} = \frac{h}{2} \|y''\|_\infty$

? $|u_n^* - u_n|$ quando $h \to 0$

Tiene conto dell'accumulo degli errori ai passi precedenti.

1) $[t_0, T] \subset \mathbb{R}$ $N_h \to \infty$ se $h \to 0$

zero-stabilità

2) $T = \infty$, intervallo temporale illimitato anche con h fisso, $N_h \to \infty$

stabilità assoluta

Metodo zero-stabile

Sia u_n la sol di un metodo numerico
e sia z_n la sol dello stesso metodo in
cui ho perturbato i dati.
Come la perturb nei dati si riflette sulla soluzione

per EE:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h f(t_n, u_n) \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

$$z_{n+1} = z_n + h \left[f(t_n, u_n) + \rho_n \right]$$

$$z_0 = y_0 + \rho_0$$

$\rho_0, \rho_1, \dots \rho_n$ sono le perturbazioni nei dati

Lo schema è <u>zero-stabile</u> se
$\exists\, C > 0,\ \exists\, h_0 > 0\ \exists\, \varepsilon_0 > 0$:
$\forall h < h_0$ e $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$,

$$|\rho_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq 0 \implies |z_n - u_n| \leq C \cdot \varepsilon \quad \forall n \geq 0$$

Posso interpretare u_n^* come una sol perturbata di u_n, si riesce a mostrare che $u_{n+1}^* = u_n^* + h f(t_n, u_n^*) + \underbrace{Ch}_{\rho_n}$

Se il metodo è zero stabile $\Rightarrow$

ho $|u_n^* - u_n| \leq C \cdot h$

$\Downarrow$

$$\underbrace{|y_n - u_n|}_{\text{convergenza}} \leq \underbrace{|y_n - u_n^*|}_{\text{consistenza}} + \underbrace{|u_n^* - u_n|}_{\text{zero-stab.}}$$

$$\leq c_1 h^2 + C h \leq C h$$

Teorema: Se la funz f del pdC è lipschitziana, allora un qualsiasi metodo a 1 passo è zero-stabile

Teorema: Se un metodo è consistente e zero stabile $\Rightarrow$ è anche convergente