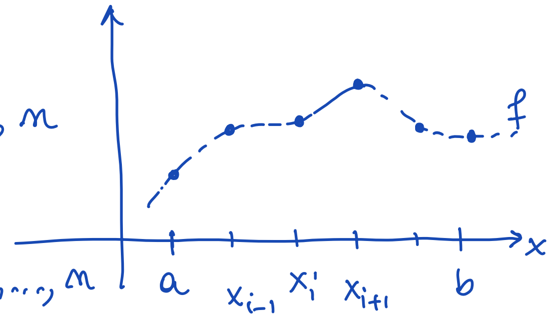
APPROSSIMAZIONE di DERIVATE

Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile

Obiettivo : calcolare la f' in certi punti $x_i \in [a,b]$ semplicem. utilizzando i valori $f(x_i)$

Dati : $x_i \in [a,b]$ con $i = 0, \dots, n$
e $f(x_i)$



Voglio calcolare $f'(x_i)$ con $i = 0, \dots, n$

Tanti approcci possibili

1) Appx la f con $p_n(x)$ = pol di interp globale di Lagrange che interpola f nei nodi x_i

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, \varphi_j(x)$$

(φ_j sono le f. di base di Lagrange)

$$f'(x_i) \sim p_n'(x_i) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, \varphi_j'(x_i)$$

$\Rightarrow$ METODI SPETTRALI

nodi x_i sono nodi di tipo Gauss-Legendre (simili a quelli delle fdq)

2) METODI alle DIFFERENZE FINITE

Def $f'(x_i) = \lim_{x \to x_i} \dfrac{f(x) - f(x_i)}{x - x_i}$ derivata prima in un punto

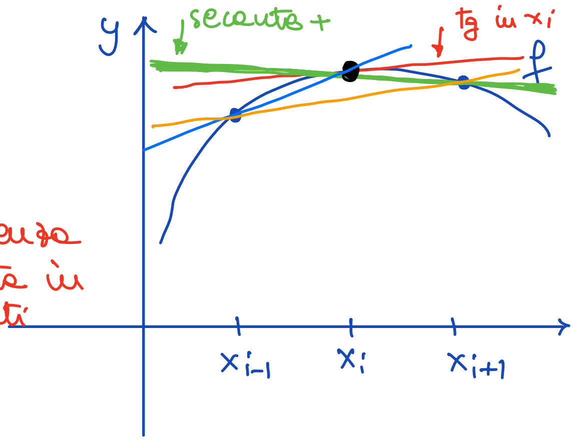
— retta tg a f in x_i

$$y = \underbrace{f'(x_i)}_{m}(x - x_i) + f(x_i)$$

$$\delta_+ f(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

differenza finita in avanti

rapp. incrementale costruito sui pti x_i e x_{i+1}



— retta passante per i punti $(x_i, f(x_i))$ e $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ e $\delta_+ f(x_i)$ è il suo coeff angolare

$$f'(x_i) \neq \delta_+ f(x_i)$$

è un' appx di $f'(x_i)$ tanto + precisa quanto più i 2 punti sono vicini

— retta passante per i punti $(x_i, f(x_i))$ e $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$

il suo coeff ang è $\delta_- f(x_i) = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$

differenza finita all' indietro

$\delta_- f(x_i)$ è un' appx di $f'(x_i)$ tanto + accurata quanto più x_{i-1} è vicino a x_i

— retta passante per i punti $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ e $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$

il suo coeff angolare è

$$\delta_c f(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$$

centrato

(se ho nodi equi)

è detto differenza finita centrata

$$\delta_c f(x_i) \sim f'(x_i)$$

? quanto bene le d.f approx la $f'(x_i)$

diff finita in avanti

? $err_+ = |f'(x_i) - \delta_+ f(x_i)|$

$$f(x) = \underbrace{f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i)}_{\text{retta tg a } f \text{ in } x_i} + \underbrace{\frac{1}{2} f''(\xi_i)(x - x_i)^2}_{\text{resto nella forma di Lagrange}}$$

dagli sviluppi di Taylor

(retta tg a f in x_i = pol di Taylor di grado 1 centrato in x_i

resto nella forma di Lagrange ξ_i è tra x e x_i (è incognito)

a patto che f sia derivabile 2 volte in $I(x_i)$.

$x = x_{i+1}$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2} f''(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)^2$$

isolo $f'(x_i)$

$$\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i) - \frac{1}{2} f''(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)^2}{(x_{i+1} - x_i)} = f'(x_i)$$

$$f'(x_i) = \underbrace{\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}}_{\delta_+ f(x_i)} \underbrace{- \frac{1}{2} f''(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)}_{\text{errore}}$$

$$f'(x_i) - \delta_+ f(x_i) = -\frac{1}{2} f''(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

errore $\rightarrow$ $\left| f'(x_i) - \delta_+ f(x_i) \right| \leq \frac{1}{2} \| f'' \|_\infty \cdot (x_{i+1} - x_i)$

che commetto se accetto $\delta_+ f(x_i)$ come appx di $f'(x_i)$

Se prendo i punti x_i tutti equisp,

detto con $h = x_{i+1} - x_i$

$$\Rightarrow \quad \left| f'(x_i) - \delta_+ f(x_i) \right| \leq \frac{1}{2} \| f'' \|_\infty \cdot h^1$$

cioè la df in avanti è accurata al 1° ordine in h

Se $h \to 0$ l'errore $\to 0$ come h

Se riduco h di $\frac{1}{10}$ $\Rightarrow$ errore si riduce di $\frac{1}{10}$

lavorando analogam. trovo:

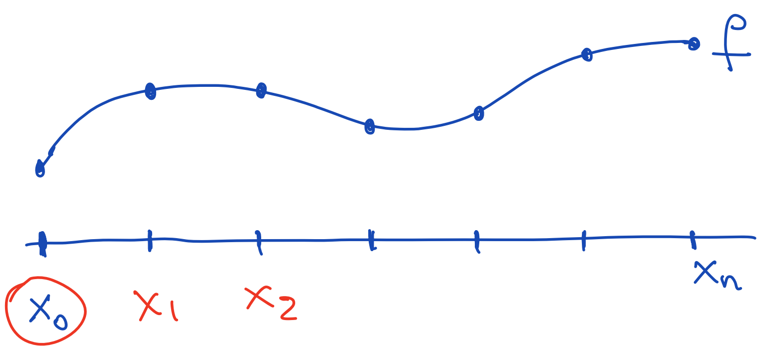
- $|f'(x_i) - \delta_- f(x_i)| \le \frac{1}{2} \|f''\|_\infty \cdot h$

  la df all'indietro è accurata di ordine 1 in h

- $|f'(x_i) - \delta_c f(x_i)| \le \frac{1}{12} \|f^{(3)}\|_\infty \cdot h^2$

  la df centrata è accurata di ordine 2 in h

  (diminuendo di 1 ordine h, l'errore diminuisce di 2 ordini)



$f'(x_0)$ qui posso usare solo $\delta_+ f(x_0)$

$f'(x_i)$ con $i = 1, \dots, n-1$ posso usare $\delta_+ f$, $\delta_- f$, $\delta_c f$

$f'(x_n)$ posso usare $\delta_- f(x)$

$\exists$ formule alle df decentrate accurate di ordine 2:

$$f'(x_0) \sim \frac{1}{2h}\left(-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)\right)$$

df decentrata del 2° ordine in h

$$f'(x_n) \sim \frac{1}{2h}\left(3f(x_n)-4f(x_{n-1})+f(x_2)\right)$$

Derivata seconda

? $$f''(x_i) = \lim_{x \to x_i} \frac{f'(x)-f'(x_i)}{x-x_i}$$

voglio sfruttare solo i valori di f.

$$f''(x_i) \sim \delta_2 f(x_i) = \frac{f(x_{i+1})-2f(x_i)+f(x_{i-1})}{h^2}$$

df centrata per la f''

(nodi equisp)

Si ricava così:

$$f''(x_i) \underset{\delta_+ f'}{\sim} \frac{f'(x_{i+1})-f'(x_i)}{x_{i+1}-x_i} \underset{\delta_- f}{\sim} \frac{\dfrac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{\underbrace{x_{i+1}-x_i}_{h}} - \dfrac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{\underbrace{x_i-x_{i-1}}_{h}}}{\underbrace{x_{i+1}-x_i}_{h}}$$

$$= \frac{f(x_{i+1})-2f(x_i)+f(x_{i-1})}{h^2}$$

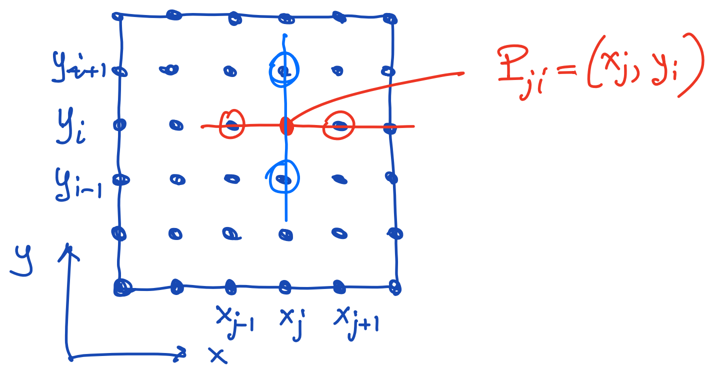
$$|f''(x_i)-\delta_2 f(x_i)| \le C \cdot h^2$$

la formula è accurata di ordine 2 in h

App di derivate in 2D

$f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y)$



$\frac{\partial f}{\partial y}(x_j, y_i)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_j, y_i) \simeq \frac{f(x_{j+1}, y_i) - f(x_{j-1}, y_i)}{2 h_x}$$

h_x è la spaziatura tra i punti lungo x

$\delta_c f$

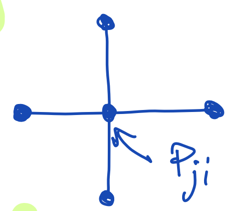
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_j, y_i) \simeq \frac{f(x_j, y_{i+1}) - f(x_j, y_{i-1})}{2 h_y}$$

h_y è la spaz. tra i punti lungo y.

Laplaciano = op. differenziale

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

$$\Delta f(x_j, y_i) \simeq \frac{f(x_{j+1}, y_i) - 2 f(x_j, y_i) + f(x_{j-1}, y_i)}{h_x^2} + \frac{f(x_j, y_{i+1}) - 2 f(x_j, y_i) + f(x_j, y_{i-1})}{h_y^2}$$



2° ord. di accuratezza sia in x che in y.