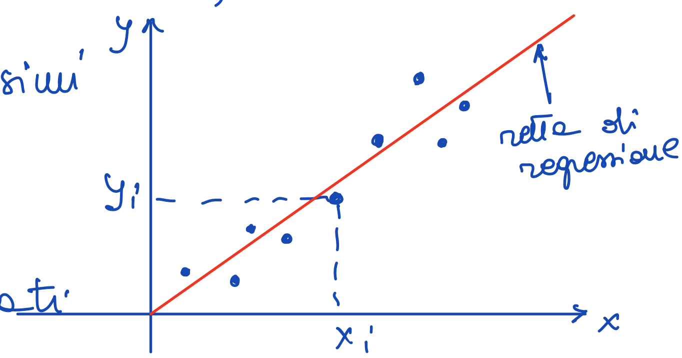
APPROSSIMAZIONE DI FUNZIONI E DATI

Abbiamo 2 problematiche: 7/11/2023

1) Dati $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ $i = 1, \dots, n$

? $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $\tilde{f}(x)$ approssimi i valori dati



approssimazione nel senso dei minimi quadrati

$\Delta V = R \cdot i$ $y = Rx$

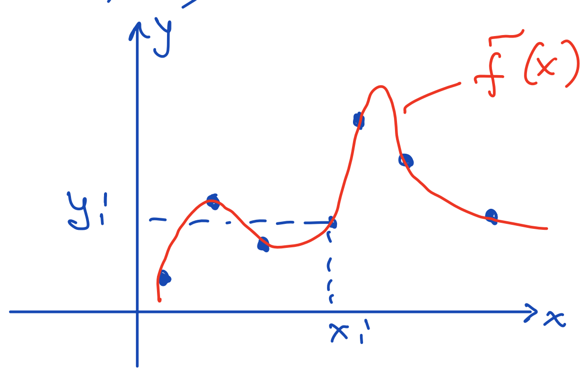
conosco i e ΔV con vari esperimenti
$i \to x$, $\Delta V \to y$

tra tutte le rette $y = mx$ cerco quella che meglio approx i miei dati

2) Dati $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ $i = 0, \dots, n$

? $\tilde{f}(x)$: $\boxed{\tilde{f}(x_i) = y_i}$

$\tilde{f}$ deve passare per i punti dati - sto facendo INTERPOLAZIONE



condizioni di interpolazione

applicazioni: ricerca di una traiettoria.

Altrimenti: conosco $f(x)$ e devo calcolare $f'(x)$ o $\int^b f(x)\,dx$

$f(x) = e^{-x^2}$, costruisco $\tilde{f} \sim f$

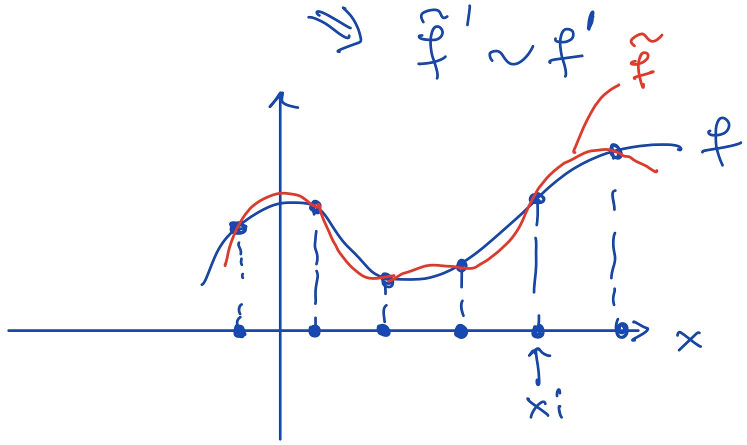
$\tilde{f}$ che interpola f in certi punti

con un'espressione + semplice di f

es: $\tilde{f}(x) =$ polinomio

se $\tilde{f} \sim f \Rightarrow \int \tilde{f} \sim \int f$

$\Rightarrow \tilde{f}' \sim f'$



dati x_i, $y_i = f(x_i)$ noti

$\tilde{f}$:
- polinomio : interpolazione polinomiale
- funz. razionale $\dfrac{P_n(x)}{P_m(x)}$: interpolazione NURBS Non-uniform Rational Basis Spline
- funzioni trigonometriche — FFT
- polinomiale a tratti (es spezzata)

APPROSSIMAZIONE nel senso dei MINIMI QUADRATI

Dati: $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \quad i = 1, \dots, n$

? polinomio di grado $m \ll n$ t.c. $p_m(x)$

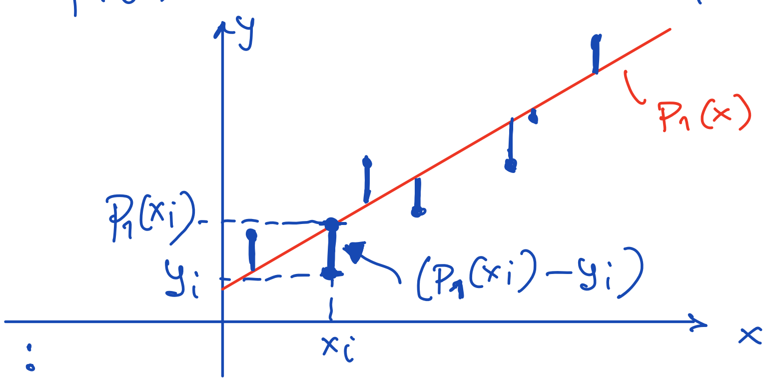
$p_m(x)$

approssimi i dati

$\boxed{m=1}$? $p_1(x) \in \mathbb{P}_1$ = spazio dei polinomi di grado 1

$p_1(x) = a_1 x + a_2$ con $x \in \mathbb{R}$ e a_1, a_2 incogniti

determinare $p_1(x)$ $\equiv$ determinare a_1 e a_2



cerco $p_1 \in \mathbb{P}_1$:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(p_1(x_i) - y_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} \left(q_1(x_i) - y_i\right)^2 \quad \forall q_1 \in \mathbb{P}_1$$

o equivalentemente

cerco $p_1 \in \mathbb{P}_1$:

$p_1(x)$ è detta sol nel senso dei minimi quadrati

$$(*) \quad \sum_{i=1}^{n} \left(p_1(x_i) - y_i\right)^2 = \min_{q_1 \in \mathbb{P}_1} \sum_{i=1}^{n} \left(q_1(x_i) - y_i\right)^2$$

se $p_1(x) = a_1 x + a_2$

scrivo il generico $\underline{q_1(x) = b_1 x + b_2}$ con $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$

cerco a_1 e a_2

$$(**) \quad \underbrace{\boxed{\sum_{i=1}^{n}\left(a_1 x_i + a_2 - y_i\right)^2}}_{\Phi(a_1,a_2)} = \min_{\substack{b_1,b_2\\ \in \mathbb{R}}} \underbrace{\boxed{\sum_{i=1}^{n}\left(b_1 x_i + b_2 - y_i\right)^2}}_{\Phi(b_1,b_2)}$$

in maniera + astratta ho

cerco $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(a_1,a_2) = \min_{b_1,b_2 \in \mathbb{R}} \Phi(b_1,b_2)$$

problema di minimo

$$\Phi(b_1,b_2) = \sum_{i=1}^{n}\left(b_1 x_i + b_2 - y_i\right)^2$$

è un paraboloide nelle variabili b_1 e b_2 con concavità rivolta verso l'alto

trovo il minimo di Φ andando a imporre

$$\nabla \Phi(b_1,b_2) = \underline{0}$$

$$\nabla \Phi(b_1,b_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \Phi}{\partial b_1} \\[2ex] \dfrac{\partial \Phi}{\partial b_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} 2\left(b_1 x_i + b_2 - y_i\right)\cdot x_i \\[2ex] \sum_{i=1}^{n} 2\left(b_1 x_i + b_2 - y_i\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \cancel{2} b_1 x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \cancel{2} b_2 x_i - \sum_{i=1}^{n} \cancel{2} y_i x_i = 0 \\[2ex] \sum_{i=1}^{n} \cancel{2} b_1 x_i + \sum_{i=1}^{n} \cancel{2} b_2 - \sum_{i=1}^{n} \cancel{2} y_i = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) b_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) b_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) b_1 + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)}_{n} b_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

sistema delle equazioni normali

ho sist dim 2x2

con matrice $\underline{\tilde{X}} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{bmatrix}$ simmetrica

vettore incognito $\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

$\underline{x}^T \underline{1} = \sum x_i$

$\underline{x}^T \underline{x} = \sum x_i^2$

termine noto $\underline{\tilde{y}} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{bmatrix}$

risolvo il sistema $\boxed{\tilde{X}\, \underline{b} = \tilde{y}}$

la sol $\underline{b}$ è di fatto il vettore $\underline{a}$ cercato cioè il vettore dei coeff a_1, a_2 del polinomio $p_1(x)$ che risolve il pbl di minimo

metodo risolutivo

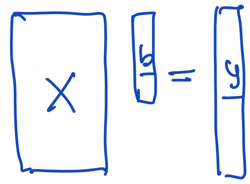
Se def $X = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix}$ e $\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

vedo che $\tilde{X} = X^T X \qquad \underline{\tilde{y}} = X^T \underline{y}$

cioè $\tilde{X}\, \underline{b} = \underline{\tilde{y}} \equiv X^T X\, \underline{b} = X^T \underline{y}$

rivedere lezione sui sistemi sovradeterminati $\longrightarrow$ $\Updownarrow$

$X\, \underline{b} = \underline{y}$ nel senso dei minimi quadrati



calcolo $\underline{b}$ risolvendo $X\underline{b} = \underline{y}$ con fatt QR

oppure $\underline{b} = X \backslash \underline{y}$ (perchè \ realizza la fatt QR se X è rettangolare)

Dati (x_i, y_i) $i = 1, \dots, n$

cercare $p_1(x) = a_1 x + a_2$ nel senso dei min quad vuol dire:

1 - costruire $X = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix}$ e $\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$

2 - risolvere il sistema rett $X\underline{b} = \underline{y}$ con fatt. QR, o \ di matlab

3 - porre $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$

Se cercassi $p_2(x) \in \mathbb{P}_2$ che appx i dati?

$p_2(x) = a_1 x^2 + a_2 x + a_3 \cdot x^0$

$$X = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$X \underline{b} = \underline{y}$ è un sist rett con 3 incognite

risolvendolo nel senso dei min quad

ho b_1, b_2, b_3

$\quad \| \quad \| \quad \|$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3$ = coeff del pol incognito

Matlab: polyfit

$a = \text{polyfit}(x, y, m)$

vett dei punti y_i

vett di $m+1$ coeff del pol $p_m(x)$ ordinati da grado max a grado min

vett dei punti x_i

grado del $p_m(x)$ che cerco nel senso dei min quad

polyfit implementa tutto il discorso visto sopra

Spazio vettoriale dei polinomi $\mathbb{P}_m$

Una base di $\mathbb{P}_m$ è la base dei monomi

$$\mathcal{B} = \{x^m, x^{m-1}, \dots\dots, x^2, x, 1\}$$

$$m = 3 \qquad P_3(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 5$$

Prendo uno spazio di funzioni di tipo sinusoidale

$$\mathcal{B} = \{ \sin(5x), \sin(4x), \sin(3x), \dots, 1 \}$$

$$\underline{u}(x) = \sum_{k=0}^{5} a_k \sin(kx)$$

Cerco $u(x)$ che appx i dati (x_i, y_i) $i = 1, \dots, n$ nel senso dei min quad, allora costruisco

$$X = \begin{bmatrix} \sin(5x_1) & \sin(4x_1) & \cdots & 1 \\ \sin(5x_2) & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin(5x_n) & \sin(4x_n) & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

la sol del sistema $X\underline{a} = \underline{y}$

è il vettore dei coeff a_k dello sviluppo di $u(x)$ rispetto alla base dei sin

INTERPOLAZIONE

Dati $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \quad i = 0, \dots, n$

$? \ \tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \quad \boxed{\tilde{f}(x_i) = y_i \quad \text{per } i = 0, \dots, n}$

cond. di interpolazione

Interpolazione polinomiale

$\tilde{f}$ è cercata nella classe dei polinomi

Se ho $(n+1)$ punti (perché $i = 0, \dots, n$)
cerco un pol di grado n.

$? \ p_n \in \mathbb{P}_n \ : \quad p_n(x_i) = y_i \quad \text{per } i = 0, \dots, n$

riscrivo p_n rispetto alla base dei monomi

$$p_n(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \dots + a_n x + a_{n+1}$$

trovare p_n $\equiv$ trovare $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$

impongo le cond di interpolazione

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} p_n(x_0) = a_1 x_0^n + a_2 x_0^{n-1} + \dots + a_n x_0 + a_{n+1} = y_0 \\ p_n(x_1) = a_1 x_1^n + a_2 x_1^{n-1} + \dots + a_n x_1 + a_{n+1} = y_1 \\ \vdots \\ p_n(x_n) = a_1 x_n^n + a_2 x_n^{n-1} + \dots + a_n x_n + a_{n+1} = y_n \end{array} \right.$$

$(n+1)$ eq2, $(n+1)$ incognite $a_1, \dots, a_{n+1}$

(*) è un sist lineare

$$X = \begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & 1 \\ x_1^n & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ x_n^n & x_n^{n-1} & & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad \underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{bmatrix}$$

matrice di VanderMonde   t. noto   vett soluz

risolvendo $X \underline{a} = \underline{y}$ trovo il vett dei coeff $a_1, \dots, a_{n+1}$

del pol di interpolazione rispetto alla base dei monomi.

$x = [x_0, x_1, \dots, x_n]$;

$X = \text{vander}(x)$.

Teorema. Se i punti $x_0, x_1, \dots, x_n$ sono tutti distinti, allora la matrice di VanderMonde è non singolare ed $\exists!$ soluz del sistema $X \underline{a} = \underline{y}$. Di conseguenza esiste unico polinomio $p_n \in \mathbb{P}_n$ che interpola i dati (x_i, y_i) con $i = 0, \dots, n$.

Alternativa matlab:

$$a = \text{polyfit}(x, y, n)$$

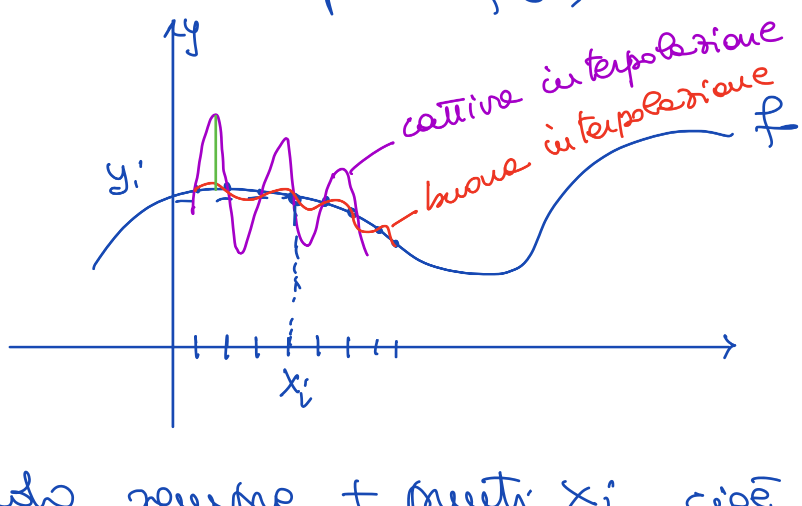
dove x e y sono vettori di lungh $(n+1)$

Se il 3° arg ≡ lungh dei vett x e y diminuito di 1, sto facendo interpolazione, altrimenti sto facendo appx nel senso dei min quad.

Att.ne: se n è alto, può succedere che la matrice X sia mal condizionata

---

Suppongo che i dati $y_i = f(x_i)$ con f nota, il mio obiettivo è calcolare $p_n(x)$ che interpola $f(x)$



Se prendo sempre + punti x_i, cioè $n \to \infty$, è vero che p_n è sempre + prossimo alla funz f?

Def: $\| f - p_n \|_\infty = \max_{x \in I} | f(x) - p_n(x) |$ norma del massimo

cioè è vero che $\| f - p_n \|_\infty \longrightarrow 0$ quando $n \to \infty$?

NON è detto, dipende dalla scelta dei nodi x_i e dipende da come è fatta la funzione