

Corso di laurea INFLT-ETELT Cognomi (M-Z)

Cognome e nome

Firma.....Matricola.....

Istruzioni

- (a). PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, telefoni cellulari, smartphone, smartwatch.
(b). CONSEGNARE **tutti i fogli su cui sono stati eseguiti i conti**.
(c). TEMPO a disposizione: 120 min.

Esercizio 1 Determinare per quali $\alpha \in (0, +\infty)$ la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\log(n^2) + \sqrt{n} + e^{-n}} \arctan(n^{-4\alpha})$$

converge.

[punti 2.5]**Esercizio 2** Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(2n!) \left(\frac{2}{3}\right)^{2n}$$

[punti 2.5]**Esercizio 3** Determinare la primitiva $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ della funzione

$$g(x) = (1 - 5x) \sin x$$

tale che $G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.**[punti 2.5]****Esercizio 4** Calcolare l'integrale

$$\int_{-1}^0 \frac{x}{(x+2)^2} dx.$$

[punti 2.5]

Rispondere alle seguenti domande.

Domanda 1

- (a). Scrivere la definizione di punto di accumulazione per un insieme e di punto isolato di un insieme.
- (b). Scrivere l'espressione di una funzione $f(x)$ che non sia definita in $x = 0$ per cui si abbia $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.
- (c). Enunciare e dimostrare il teorema di unicità del limite.

Domanda 2

- (a). Scrivere la definizione di funzione convessa in un punto x_0 e chiarire la definizione con un esempio.
- (b). Enunciare il criterio del segno della derivata seconda e riportare un esempio di funzione che soddisfa una delle implicazioni del teorema.
- (c). Se $f''(x) \geq 0 \forall x \in (0, 1)$, che cosa possiamo concludere sulla crescita e decrescita della funzione $f'(x)$?

Domanda 3

- (a). Scrivere la definizione di serie numerica, definire la successione delle somme parziali (o ridotte) e dare la definizione di serie convergente, divergente, indeterminata.
- (b). Scrivere la forma generale di una serie geometrica e riportare due esempi di serie geometrica, una convergente ed una divergente.
- (c). Enunciare e dimostrare il teorema di caratterizzazione della serie geometrica.

Corso di laurea INFLT-ETELT Cognomi (M-Z)

Cognome e nome

Firma.....Matricola.....

Istruzioni

- (a). PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, telefoni cellulari, smartphone, smartwatch.
(b). CONSEGNARE **tutti i fogli su cui sono stati eseguiti i conti**.
(c). TEMPO a disposizione: 120 min.

Esercizio 1 Determinare per quali $\alpha \in (0, +\infty)$ la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\log(n^4) + \sqrt{n} + e^{-n}} \arctan(n^{-5\alpha})$$

converge.

[punti 2.5]**Esercizio 2** Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(3n!) \left(\frac{4}{5}\right)^{2n}$$

[punti 2.5]**Esercizio 3** Determinare la primitiva $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ della funzione

$$g(x) = (2 - 4x) \sin x$$

tale che $G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.**[punti 2.5]****Esercizio 4** Calcolare l'integrale

$$\int_{-2}^0 \frac{x}{(x+3)^2} dx.$$

[punti 2.5]

Rispondere alle seguenti domande.

Domanda 1

- (a). Scrivere un numero complesso generico in forma cartesiana ed in forma esponenziale specificando chi sono parte reale/immaginaria, modulo e argomento e a quali insiemi numerici appartengono.
- (b). Mostrare come passare dalla forma esponenziale alla forma cartesiana di un numero complesso generico.
- (c). Scrivere la definizione di esponenziale di un numero complesso.
- (d). Dimostrare che $e^{z+2k\pi i} = e^z$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ e per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

Domanda 2

- (a). Scrivere la definizione di funzione continua in un punto e classificare i punti di discontinuità, corredando le definizioni con degli esempi grafici.
- (b). È possibile integrare una funzione $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ che presenta in $x = 0$ un punto di discontinuità eliminabile? Se la risposta è affermativa, come si procede a calcolare l'integrale $\int_{-1}^1 f(x)dx$?
- (c). Enunciare il teorema di Weierstrass per le funzioni continue. Riportare un esempio per cui sono soddisfatte ipotesi e tesi del teorema; riportare un esempio in cui non è soddisfatta una delle ipotesi del teorema e per cui non è possibile che sia soddisfatta la tesi.

Domanda 3

- (a). Scrivere la definizione di primitiva $F(x)$ di una funzione $f(x)$ definita su un intervallo I e riportare un esempio di funzione f e della sua primitiva F .
- (b). Dimostrare che tutte le primitive di una funzione differiscono di una costante additiva.
- (c). $F(x) = |x|$ può essere la primitiva di una funzione $f(x)$ sull'intervallo $[-1, 1]$? Giustificare la risposta.