Analisi Matematica 1 - Appello (seconda parte) 12 gennaio 2024

Corso di laurea INFLT-ETELT Cognomi (M-Z)

Cognome e nome ....

Firma.................................... Matricola.....................................

Istruzioni

(a). PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, telefoni cellulari, smartphone, smartwatch.

(b). CONSEGNARE **tutti i fogli su cui sono stati eseguiti i conti**.

(c). TEMPO a disposizione: 120 min.

Esercizio 1 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$$

[punti 2]

Esercizio 2 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \log\left(1+\frac{6}{n+\sqrt{n}+1}\right)\frac{\arctan(n!+3^n+1)}{n^3-2n}$$

[punti 3]

Esercizio 3 Calcolare l'integrale indefinito di

$$f(x) = 7 + \log^2 x$$

[punti 2]

Esercizio 4 Calcolare l'area del trapezoide sotteso alla funzione

$$f(x) = \frac{3\cos x}{\sin^2 x + 1}$$

sull'intervallo $[0, \pi]$.

[punti 3]

Rispondere alle seguenti domande.

Domanda 1

(a). Scrivere la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ con $\ell \in \mathbb{R}$ e fare un disegno che ne chiarisca il significato. Come si definisce una successione che soddisfa questo limite?

(b). Sia a_n una successione a termini positivi e convergente a $\ell = 1$. Qual è il carattere della serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$? Giustificare la risposta scrivendo il ragionamento seguito.

(c). Scrivere la definizione di successione limitata e dimostrare il teorema che assicura che una successione convergente è anche limitata.

Domanda 2

(a). Scrivere la definizione di punto stazionario (elencare anche tutte le proprietà che deve soddisfare un punto x_0 affinché possa essere un punto stazionario) e mostrare esempi grafici delle tre tipologie possibili di punto stazionario classificando il tipo di punto.

(b). E' possibile che un punto di minimo relativo non sia stazionario? Giustificare la risposta mostrando anche un esempio grafico.

(c). Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat dei punti stazionari.

Domanda 3

(a). Scrivere la definizione di funzione integrale $\mathcal{F}_{x_0}(x)$ di una funzione $f(x)$ su un intervallo $[a, b]$.

(b). Enunciare e dimostrare il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale.

(c). Scrivere e disegnare una semplice funzione f definita su $[-1, 1]$, che abbia un punto di salto in $x_0 = 0$ e che sia continua in tutti gli altri punti dell'intervallo. f è integrabile secondo Riemann? Se la risposta è positiva, come si può procedere per calcolare $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ sfruttando il secondo teorema del calcolo integrale?