Analisi Matematica 1 - Appello (seconda parte) 9 febbraio 2024

Corso di laurea INFLT-ETELT Cognomi (M-Z)

---

Cognome e nome ..........................................................................

Firma.................................Matricola.....................................

---

**Istruzioni**

(a). PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, telefoni cellulari, smartphone, smartwatch.

(b). CONSEGNARE **tutti i fogli su cui sono stati eseguiti i conti**.

(c). TEMPO a disposizione: 120 min.

---

**Esercizio 1** Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+1)}$$

**[punti 2]**

---

**Esercizio 2** Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(1-\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\log\left(\frac{n+7}{n+6}\right)$$

**[punti 3]**

---

**Esercizio 3** Calcolare l'area del trapezoide sotteso alla funzione

$$f(x) = e^x - 2$$

sull'intervallo $[0,2]$.

**[punti 2]**

---

**Esercizio 4** Calcolare l'integrale

$$\int_1^{\sqrt{9}} x\log\left(1+\frac{9}{x^2}\right)dx$$

**[punti 3]**

---

Rispondere alle seguenti domande.

**Domanda 1**

(a). Scrivere la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ e fare un disegno che ne chiarisca il significato. Come si definisce una successione che soddisfa questo limite?

(b). Scrivere la definizione di successione limitata e dimostrare il teorema che assicura che una successione convergente è anche limitata.

(c). Sia $a_n$ una successione a termini positivi e infinitesima. Possiamo concludere che la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge? Giustificare la risposta.

**Domanda 2**

(a). Scrivere la definizione di funzione convessa in un punto $x_0$ e chiarire la definizione con un esempio.

(b). Enunciare il criterio del segno della derivata seconda e riportare un esempio di funzione che soddisfa una delle implicazioni del teorema.

(c). Scrivere la definizione di punto di flesso e riportare un esempio grafico di una funzione con un punto di flesso a tangente obliqua. Un punto di minimo relativo stazionario può essere anche un punto di flesso? Giustificare la risposta.

**Domanda 3**

(a). Scrivere la definizione di funzione integrale $\mathcal{F}_{x_0}(x)$ di una funzione $f(t)$.
Sia $f(t) = \sin(t)$ e $x_0 = \pi$. Scrivere l'espressione di $\mathcal{F}_{x_0}(x)$.

(b). Enunciare e dimostrare il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale.

(c). La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } x \in [-1, 0) \\ x & \text{se } x \in [0, 1] \end{cases}$$

è integrabile secondo Riemann sull'intervallo $[-1, 1]$? Perché? In caso la risposta sia affermativa, mostrare come procedere per calcolare $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.