Analisi Matematica 1 - Appello 21 giugno 2023

Corso di laurea INFLT-ETELT Cognomi (M-Z)

Il NUMERO della FILA è contenuto nel testo dell' esercizio numero 3 ed è l'intero sommato ad n nel'esponente di e.

Fila 1

1. *Dominio:* $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$; la funzione è dispari;

Osservazione: poiché la funzione è dispari, si può studiare la funzione per le sole $x \geq 0$ e quindi dedurre il comportamento di f quando $x < 0$ per simmetria.

Limiti: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $y = 0$ è asintoto orizzontale completo;
$\lim_{x\to 2^\pm} f(x) = +\infty$, quindi la retta $x = 2$ è asintoto verticale completo;
$\lim_{x\to -2^\pm} f(x) = -\infty$, quindi la retta $x = -2$ è asintoto verticale completo;

Derivata:
È utile spezzare la funzione in due parti:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2-4} & x < -2 \cup x > 2 \\ \dfrac{x}{-x^2+4} & -2 < x < 2 \end{cases}$$

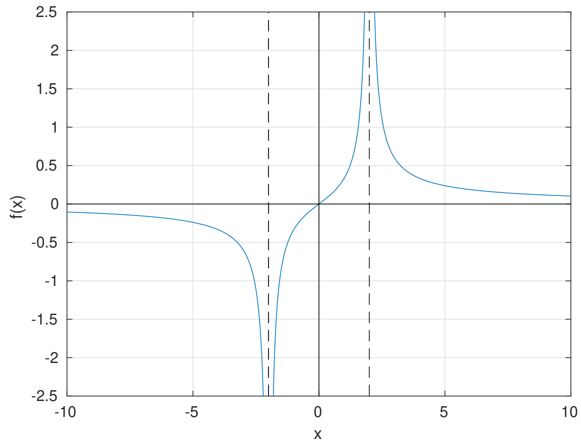
La funzione derivata prima è:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2^2-x^2}{(x^2-4)^2} & x < -2 \cup x > 2 \\ \dfrac{2^2+x^2}{(-x^2+4)^2} & -2 < x < 2 \end{cases}$$

$dom(f') = dom(f)$, quindi non ci sono punti di non derivabilità.

Segno di f': $f'(x) < 0$ quando $x < -2 \cup x > 2$, quindi qui f è decrescente;
$f'(x) > 0$ quando $-2 < x < 2$, quindi qui f è crescente;
non ci sono punti stazionari, non ci sono punti di massimo o minimo relativo o assoluto;

Disegno: non avendo studiato il segno della derivata seconda, non abbiamo informazioni sulla concavità/convessità. Con le informazioni che abbiamo a disposizione il disegno più semplice che possiamo tracciare è di una curva con la concavità rivolta verso il basso quando $x < 0$ e rivolta verso l'alto quando $x > 0$;



Flessi: la funzione tende a $-\infty$ per $x \to -2^+$, quindi in un intorno destro di -2 ha la concavità verso il basso; la funzione tende a $+\infty$ per $x \to +2^-$, quindi in un intorno sinistro di 2 ha la concavità verso l'alto; poiché la funzione è continua nell'intervallo $]-2,2[$ e non ha punti di non derivabilità, è necessario che ci sia un punto di flesso nell'intervallo $]-2,2[$.

2. Osserviamo che $w \in \mathbb{R}$ equivale a chiedere che $Im(w) = 0$. Poiché $Re(z)$ compare a denominatore, dobbiamo chiedere chei $x = Re(z)$ sia non nulla.

Si ottiene $Im(w) = -2y - 4 - 2x^2$, quindi il luogo geometrico cercato è la parabola $y = -x^2 - 2$ escluso il punto $(0, -2)$.

3. La serie è a termini positivi. Applicando il criterio del confronto asintotico ed il criterio del rapporto si deduce che la serie è convergente.

4. La funzione è continua in $x = 0$ in quanto $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$.
Per studiare la derivabilità in $x = 0$ si consiglia di calcolare le derivate destra e sinistra in $x = 0$ con il limite del rapporto incrementale. Si ha $f'_-(0) = -4$, $f'_+(0) = 0$, quindi f non è derivabile in $x = 0$ ed il punto $x = 0$ è un punto angoloso.

5. L'area del trapezoide si ottiene calcolando $A = \int_1^2 |f(x)|dx$. Poiché $(x-3) \leq 0$ sull'intervallo $[1,2]$, $|f(x)| = -f(x) = (3-x)\log(x)$. Integrando per parti, si trova $A = 4\log 2 - \frac{9}{4}$.

Fila 2

1. *Dominio:* $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$; la funzione è dispari;

Osservazione: poiché la funzione è dispari, si può studiare la funzione per le sole $x \geq 0$ e quindi dedurre il comportamento di f quando $x < 0$ per simmetria.

Limiti: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $y = 0$ è asintoto orizzontale completo;
$\lim_{x\to 3^\pm} f(x) = +\infty$, quindi la retta $x = 3$ è asintoto verticale completo;
$\lim_{x\to -3^\pm} f(x) = -\infty$, quindi la retta $x = -3$ è asintoto verticale completo;

Derivata:
È utile spezzare la funzione in due parti:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2-9} & x < -3 \cup x > 3 \\ \dfrac{x}{-x^2+9} & -3 < x < 3 \end{cases}$$

La funzione derivata prima è:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-3^2-x^2}{(x^2-9)^2} & x < -3 \cup x > 3 \\ \dfrac{3^2+x^2}{(-x^2+9)^2} & -3 < x < 3 \end{cases}$$

$dom(f') = dom(f)$, quindi non ci sono punti di non derivabilità.

Segno di f': $f'(x) < 0$ quando $x < -3 \cup x > 3$, quindi qui f è decrescente;
$f'(x) > 0$ quando $-3 < x < 3$, quindi qui f è crescente;
non ci sono punti stazionari, non ci sono punti di massimo o minimo relativo o assoluto;

Disegno: non avendo studiato il segno della derivata seconda, non abbiamo informazioni sulla concavità/convessità. Con le informazioni che abbiamo a disposizione il disegno più semplice che possiamo tracciare è di una curva con la concavità rivolta verso il basso quando $x < 0$ e rivolta verso l'alto quando $x > 0$;

Flessi: la funzione tende a $-\infty$ per $x \to -3^+$, quindi in un intorno destro di -3 ha la concavità verso il basso; la funzione tende a $+\infty$ per $x \to +3^-$, quindi in un intorno sinistro di 3 ha la concavità verso l'alto; poiché la funzione è continua nell'intervallo $]-3, 3[$ e non ha punti di non derivabilità, è necessario che ci sia un punto di flesso nell'intervallo $]-3, 3[$.

2. Osserviamo che $w \in \mathbb{R}$ equivale a chiedere che $Im(w) = 0$. Poiché $Re(z)$ compare a denominatore, dobbiamo chiedere chei $x = Re(z)$ sia non nulla.

Si ottiene $Im(w) = -2y - 8 - 2x^2$, quindi il luogo geometrico cercato è la parabola $y = -x^2 - 4$ escluso il punto $(0, -4)$.

3. La serie è a termini positivi. Applicando il criterio del confronto asintotico ed il criterio del rapporto si deduce che la serie è convergente.

4. La funzione è continua in $x = 0$ in quanto $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$.
Per studiare la derivabilità in $x = 0$ si consiglia di calcolare le derivate destra e sinistra in $x = 0$ con il limite del rapporto incrementale. Si ha $f'_-(0) = -16$, $f'_+(0) = 0$, quindi f non è derivabile in $x = 0$ ed il punto $x = 0$ è un punto angoloso.

5. L'area del trapezoide si ottiene calcolando $A = \int_1^2 |f(x)| dx$. Poiché $(x - 4) \leq 0$ sull'intervallo $[1, 2]$, $|f(x)| = -f(x) = (4 - x) \log(x)$. Integrando per parti, si trova $A = 6 \log 2 - \frac{13}{4}$.

Fila 3

1. *Dominio:* dom $f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 4\}$; la funzione è dispari;

Osservazione: poiché la funzione è dispari, si può studiare la funzione per le sole $x \geq 0$ e quindi dedurre il comportamento di f quando $x < 0$ per simmetria.

Limiti: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $y = 0$ è asintoto orizzontale completo;
$\lim_{x\to 4^\pm} f(x) = +\infty$, quindi la retta $x = 4$ è asintoto verticale completo;
$\lim_{x\to -4^\pm} f(x) = -\infty$, quindi la retta $x = -4$ è asintoto verticale completo;

Derivata:
È utile spezzare la funzione in due parti:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2-16} & x < -4 \cup x > 4 \\ \dfrac{x}{-x^2+16} & -4 < x < 4 \end{cases}$$

La funzione derivata prima è:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-4^2-x^2}{(x^2-16)^2} & x < -4 \cup x > 4 \\ \dfrac{4^2+x^2}{(-x^2+16)^2} & -4 < x < 4 \end{cases}$$

$dom(f') = dom(f)$, quindi non ci sono punti di non derivabilità.

Segno di f': $f'(x) < 0$ quando $x < -4 \cup x > 4$, quindi qui f è decrescente;
$f'(x) > 0$ quando $-4 < x < 4$, quindi qui f è crescente;
non ci sono punti stazionari, non ci sono punti di massimo o minimo relativo o assoluto;

Disegno: non avendo studiato il segno della derivata seconda, non abbiamo informazioni sulla concavità/convessità. Con le informazioni che abbiamo a disposizione il disegno più semplice che possiamo tracciare è di una curva con la concavità rivolta verso il basso quando $x < 0$ e rivolta verso l'alto quando $x > 0$;

Flessi: la funzione tende a $-\infty$ per $x \to -4^+$, quindi in un intorno destro di -4 ha la concavità verso il basso; la funzione tende a $+\infty$ per $x \to +4^-$, quindi in un intorno sinistro di 4 ha la concavità verso l'alto; poiché la funzione è continua nell'intervallo $]-4, 4[$ e non ha punti di non derivabilità, è necessario che ci sia un punto di flesso nell'intervallo $]-4, 4[$.

2. Osserviamo che $w \in \mathbb{R}$ equivale a chiedere che $Im(w) = 0$. Poiché $Re(z)$ compare a denominatore, dobbiamo chiedere chei $x = Re(z)$ sia non nulla.

Si ottiene $Im(w) = -2y - 12 - 2x^2$, quindi il luogo geometrico cercato è la parabola $y = -x^2 - 6$ escluso il punto $(0, -6)$.

3. La serie è a termini positivi. Applicando il criterio del confronto asintotico ed il criterio del rapporto si deduce che la serie è convergente.

4. La funzione è continua in $x = 0$ in quanto $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$.
Per studiare la derivabilità in $x = 0$ si consiglia di calcolare le derivate destra e sinistra in $x = 0$ con il limite del rapporto incrementale. Si ha $f'_-(0) = -36$, $f'_+(0) = 0$, quindi f non è derivabile in $x = 0$ ed il punto $x = 0$ è un punto angoloso.

5. L'area del trapezoide si ottiene calcolando $A = \int_1^2 |f(x)|dx$. Poiché $(x-5) \le 0$ sull'intervallo $[1, 2]$, $|f(x)| = -f(x) = (5-x)\log(x)$. Integrando per parti, si trova $A = 8\log 2 - \frac{17}{4}$.

Fila 4

1. *Dominio:* $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 5\}$; la funzione è dispari;

Osservazione: poiché la funzione è dispari, si può studiare la funzione per le sole $x \geq 0$ e quindi dedurre il comportamento di f quando $x < 0$ per simmetria.

Limiti: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $y = 0$ è asintoto orizzontale completo;
$\lim_{x\to 5^\pm} f(x) = +\infty$, quindi la retta $x = 5$ è asintoto verticale completo;
$\lim_{x\to -5^\pm} f(x) = -\infty$, quindi la retta $x = -5$ è asintoto verticale completo;

Derivata:
È utile spezzare la funzione in due parti:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2 - 25} & x < -5 \cup x > 5 \\ \dfrac{x}{-x^2 + 25} & -5 < x < 5 \end{cases}$$

La funzione derivata prima è:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-5^2 - x^2}{(x^2 - 25)^2} & x < -5 \cup x > 5 \\ \dfrac{5^2 + x^2}{(-x^2 + 25)^2} & -5 < x < 5 \end{cases}$$

$dom(f') = dom(f)$, quindi non ci sono punti di non derivabilità.

Segno di f': $f'(x) < 0$ quando $x < -5 \cup x > 5$, quindi qui f è decrescente;
$f'(x) > 0$ quando $-5 < x < 5$, quindi qui f è crescente;
non ci sono punti stazionari, non ci sono punti di massimo o minimo relativo o assoluto;

Disegno: non avendo studiato il segno della derivata seconda, non abbiamo informazioni sulla concavità/convessità. Con le informazioni che abbiamo a disposizione il disegno più semplice che possiamo tracciare è di una curva con la concavità rivolta verso il basso quando $x < 0$ e rivolta verso l'alto quando $x > 0$;

Flessi: la funzione tende a $-\infty$ per $x \to -5^+$, quindi in un intorno destro di -5 ha la concavità verso il basso; la funzione tende a $+\infty$ per $x \to +5^-$, quindi in un intorno sinistro di 5 ha la concavità verso l'alto; poiché la funzione è continua nell'intervallo $]-5, 5[$ e non ha punti di non derivabilità, è necessario che ci sia un punto di flesso nell'intervallo $]-5, 5[$.

2. Osserviamo che $w \in \mathbb{R}$ equivale a chiedere che $Im(w) = 0$. Poiché $Re(z)$ compare a denominatore, dobbiamo chiedere chei $x = Re(z)$ sia non nulla.

Si ottiene $Im(w) = -2y - 16 - 2x^2$, quindi il luogo geometrico cercato è la parabola $y = -x^2 - 8$ escluso il punto $(0, -8)$.

3. La serie è a termini positivi. Applicando il criterio del confronto asintotico ed il criterio del rapporto si deduce che la serie è convergente.

4. La funzione è continua in $x = 0$ in quanto $f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$.
Per studiare la derivabilità in $x = 0$ si consiglia di calcolare le derivate destra e sinistra in $x = 0$ con il limite del rapporto incrementale. Si ha $f'_-(0) = -64$, $f'_+(0) = 0$, quindi f non è derivabile in $x = 0$ ed il punto $x = 0$ è un punto angoloso.

5. L'area del trapezoide si ottiene calcolando $A = \int_1^2 |f(x)| dx$. Poiché $(x - 6) \leq 0$ sull'intervallo $[1, 2]$, $|f(x)| = -f(x) = (6 - x)\log(x)$. Integrando per parti, si trova $A = 10 \log 2 - \frac{21}{4}$.
