Analisi Matematica 1 - Appello 12 luglio 2023

Corso di laurea INFLT-ETELT Cognomi (M-Z)

Il NUMERO della FILA è contenuto nel testo dell'esercizio numero 1 ed è la costante sommata all'esponenziale.

Fila 1

1. *Dominio:* $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; la funzione è pari;

Osservazione: poiché la funzione è pari, si può studiare la funzione per le sole $x > 0$ e quindi dedurre il comportamento di f quando $x < 0$ per simmetria.

Limiti: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$, $y = 1$ è asintoto orizzontale completo (quindi la funzione non ammette asintoti obliqui);
$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, quindi la funzione non ammette asintoti verticali; la funzione risulta limitata.

Derivata:

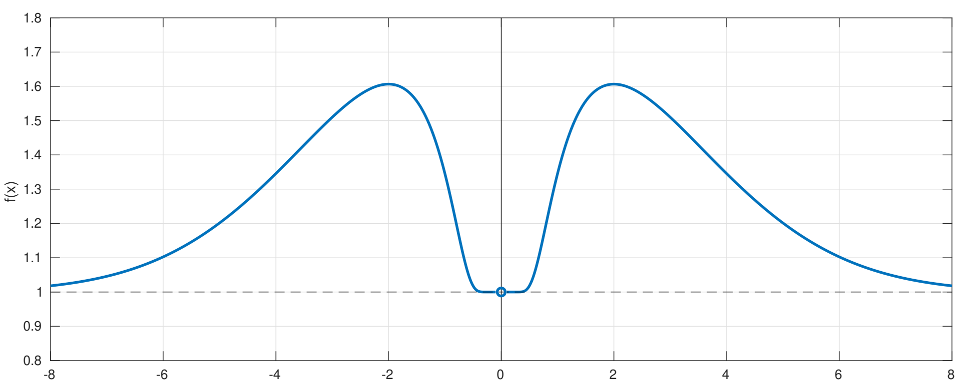
$$f'(x) = \frac{16 - x^4}{8x^3} e^{-(\frac{x^2}{16} + \frac{1}{x^2})}$$

$dom(f') = dom(f)$, quindi non ci sono punti di non derivabilità.

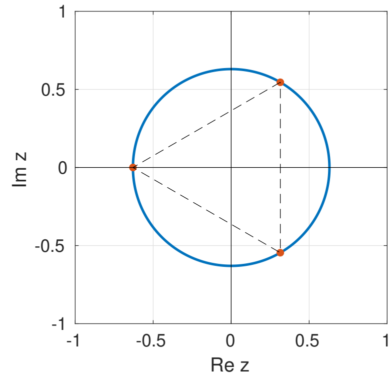
Punti stazionari:
$f'(x) = 0$ se e solo se $16 - x^4 = 0$. Poiché $16 - x^4 = (4 - x^2)(4 + x^2) = (2 - x)(2 + x)(4 + x^2)$, f ammette i punti stazionari $x = \pm 2$.

Segno di f':
$f'(x) > 0$ quando $x \in]-\infty, -2[\cup]0, +2[$, qui f è crescente;
$f'(x) < 0$ quando $x \in]-2, 0[\cup]2, +\infty[$, qui f è decrescente;
$x = \pm 2$ sono punti di massimo assoluto e relativo; non esistono punti di minimo assoluto nè relativo.

Limite della derivata prima:
$\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$, quindi quando $x \to 0$ la funzione tende a 1 assumendo una tangenza quasi orizzontale.



2. Si ha $w = -\frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^2}e^{\pi i}$. Le radici sono $z_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$, $z_1 = -\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}}$, $z_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.



3. Si tratta di una serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ con $q = \frac{1+7a^2}{6a^2+5}$. Poiché sia numeratore che denominatore di q sono positivi, la serie è a termini positivi. Ricordiamo che una serie geometrica converge se e solo se $|q| < 1$, poiché $q > 0$, basta chiedere che $q < 1$. Si ottiene che la serie converge se e solo se $-2 < a < 2$.

4. La funzione è continua in $x = 0$ in quanto $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$.
Per studiare la derivabilità in $x = 0$ si consiglia di calcolare le derivate destra e sinistra in $x = 0$ con il limite del rapporto incrementale. Si ha $f'_{\pm}(0) = 3$, pertanto la funzione è anche derivabile in $x = 0$.

5. L'area del trapezoide si ottiene calcolando $A = \displaystyle\int_0^{\pi/3} |f(x)|dx$. Si ha che $f(x) \geq 0$ quando $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$, quindi

$$A = \int_0^{\pi/4} -f(x)dx + \int_{\pi/4}^{\pi/3} f(x)dx.$$

Applicando la sostituzione $y = \tan(x)$, si ottiene $A = 3\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}3^{3/4} - 3^{1/2}\right)$.

Fila 2

1. *Dominio:* dom $f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; la funzione è pari;

Osservazione: poiché la funzione è pari, si può studiare la funzione per le sole $x > 0$ e quindi dedurre il comportamento di f quando $x < 0$ per simmetria.

Limiti: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$, $y = 2$ è asintoto orizzontale completo (quindi la funzione non ammette asintoti obliqui);
$\lim_{x\to 0} f(x) = 2$, quindi la funzione non ammette asintoti verticali; la funzione risulta limitata.

Derivata:

$$f'(x) = \frac{16 - x^4}{8x^3}e^{-\left(\frac{x^2}{16}+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$dom(f') = dom(f)$, quindi non ci sono punti di non derivabilità.

Punti stazionari:
$f'(x) = 0$ se e solo se $16 - x^4 = 0$. Poiché $16 - x^4 = (4 - x^2)(4 + x^2) = (2 - x)(2 + x)(4 + x^2)$, f ammette i punti stazionari $x = \pm 2$.

Segno di f':
$f'(x) > 0$ quando $x \in]-\infty, -2[\cup]0, +2[$, qui f è crescente;
$f'(x) < 0$ quando $x \in]-2, 0[\cup]2, +\infty[$, qui f è decrescente;
$x = \pm 2$ sono punti di massimo assoluto e relativo; non esistono punti di minimo assoluto nè relativo.

Limite della derivata prima:
$\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$, quindi quando $x \to 0$ la funzione tende a 2 assumendo una tangenza quasi orizzontale.

2. Si ha $w = -\frac{1}{2^4} = \frac{1}{2^4} e^{\pi i}$. Le radici sono $z_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{2^4}} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)$, $z_1 = -\frac{1}{\sqrt[3]{2^4}}$, $z_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2^4}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)$.

3. Si tratta di una serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ con $q = \frac{1+6a^2}{5a^2+10}$. Poiché sia numeratore che denominatore di q sono positivi, la serie è a termini positivi. Ricordiamo che una serie geometrica converge se e solo se $|q| < 1$, poiché $q > 0$, basta chiedere che $q < 1$. Si ottiene che la serie converge se e solo se $-3 < a < 3$.

4. La funzione è continua in $x = 0$ in quanto $f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$.
Per studiare la derivabilità in $x = 0$ si consiglia di calcolare le derivate destra e sinistra in $x = 0$ con il limite del rapporto incrementale. Si ha $f'_{\pm}(0) = 6$, pertanto la funzione è anche derivabile in $x = 0$.

5. L'area del trapezoide si ottiene calcolando $A = \int_0^{\pi/3} |f(x)| dx$. Si ha che $f(x) \geq 0$ quando $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \right]$, quindi

$$A = \int_0^{\pi/4} -f(x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/3} f(x) dx.$$

Applicando la sostituzione $y = \tan(x)$, si ottiene $A = 5 \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} 3^{3/4} - 3^{1/2} \right)$.

Fila 3

1. *Dominio:* dom $f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; la funzione è pari;

Osservazione: poiché la funzione è pari, si può studiare la funzione per le sole $x > 0$ e quindi dedurre il comportamento di f quando $x < 0$ per simmetria.

Limiti: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 3$, $y = 3$ è asintoto orizzontale completo (quindi la funzione non ammette asintoti obliqui);
$\lim_{x \to 0} f(x) = 3$, quindi la funzione non ammette asintoti verticali; la funzione risulta limitata.

Derivata:

$$f'(x) = \frac{16 - x^4}{8x^3} e^{-\left(\frac{x^2}{16} + \frac{1}{x^2}\right)}$$

$dom(f') = dom(f)$, quindi non ci sono punti di non derivabilità.

Punti stazionari:
$f'(x) = 0$ se e solo se $16 - x^4 = 0$. Poiché $16 - x^4 = (4 - x^2)(4 + x^2) = (2 - x)(2 + x)(4 + x^2)$, f ammette i punti stazionari $x = \pm 2$.

Segno di f':
$f'(x) > 0$ quando $x \in]-\infty, -2[\cup]0, +2[$, qui f è crescente;
$f'(x) < 0$ quando $x \in]-2, 0[\cup]2, +\infty[$, qui f è decrescente;
$x = \pm 2$ sono punti di massimo assoluto e relativo; non esistono punti di minimo assoluto nè relativo.

Limite della derivata prima:
$\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$, quindi quando $x \to 0$ la funzione tende a 3 assumendo una tangenza quasi orizzontale.

2. Si ha $w = -\frac{1}{2^6} = \frac{1}{2^6} e^{\pi i}$. Le radici sono $z_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{2^6}} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)$, $z_1 = -\frac{1}{\sqrt[3]{2^6}}$, $z_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2^6}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)$.

3. Si tratta di una serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ con $q = \frac{1+5a^2}{4a^2+17}$. Poiché sia numeratore che denominatore di q sono positivi, la serie è a termini positivi. Ricordiamo che una serie geometrica converge se e solo se $|q| < 1$, poiché $q > 0$, basta chiedere che $q < 1$. Si ottiene che la serie converge se e solo se $-4 < a < 4$.

4. La funzione è continua in $x = 0$ in quanto $f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$.
Per studiare la derivabilità in $x = 0$ si consiglia di calcolare le derivate destra e sinistra in $x = 0$ con il limite del rapporto incrementale. Si ha $f'_{\pm}(0) = 9$, pertanto la funzione è anche derivabile in $x = 0$.

5. L'area del trapezoide si ottiene calcolando $A = \displaystyle\int_0^{\pi/3} |f(x)| dx$. Si ha che $f(x) \geq 0$ quando $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$, quindi

$$A = \int_0^{\pi/4} -f(x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/3} f(x) dx.$$

Applicando la sostituzione $y = \tan(x)$, si ottiene $A = 7 \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} 3^{3/4} - 3^{1/2} \right)$.

Fila 4

1. *Dominio:* $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; la funzione è pari;

Osservazione: poiché la funzione è pari, si può studiare la funzione per le sole $x > 0$ e quindi dedurre il comportamento di f quando $x < 0$ per simmetria.

Limiti: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 4$, $y = 4$ è asintoto orizzontale completo (quindi la funzione non ammette asintoti obliqui);
$\lim_{x \to 0} f(x) = 4$, quindi la funzione non ammette asintoti verticali; la funzione risulta limitata.

Derivata:

$$f'(x) = \frac{16 - x^4}{8x^3} e^{-\left(\frac{x^2}{16} + \frac{1}{x^2}\right)}$$

$dom(f') = dom(f)$, quindi non ci sono punti di non derivabilità.

Punti stazionari:
$f'(x) = 0$ se e solo se $16 - x^4 = 0$. Poiché $16 - x^4 = (4 - x^2)(4 + x^2) = (2 - x)(2 + x)(4 + x^2)$, f ammette i punti stazionari $x = \pm 2$.

Segno di f':
$f'(x) > 0$ quando $x \in]-\infty, -2[\cup]0, +2[$, qui f è crescente;
$f'(x) < 0$ quando $x \in]-2, 0[\cup]2, +\infty[$, qui f è decrescente;
$x = \pm 2$ sono punti di massimo assoluto e relativo; non esistono punti di minimo assoluto nè relativo.

Limite della derivata prima:
$\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$, quindi quando $x \to 0$ la funzione tende a 4 assumendo una tangenza quasi orizzontale.

2. Si ha $w = -\frac{1}{2^8} = \frac{1}{2^8} e^{\pi i}$. Le radici sono $z_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{2^8}} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)$, $z_1 = -\frac{1}{\sqrt[3]{2^8}}$, $z_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2^8}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)$.

3. Si tratta di una serie geometrica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ con $q = \frac{1+4a^2}{3a^2+26}$. Poiché sia numeratore che denominatore di q sono positivi, la serie è a termini positivi. Ricordiamo che una serie geometrica converge se e solo se $|q| < 1$, poiché $q > 0$, basta chiedere che $q < 1$. Si ottiene che la serie converge se e solo se $-5 < a < 5$.

4. La funzione è continua in $x = 0$ in quanto $f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$.
Per studiare la derivabilità in $x = 0$ si consiglia di calcolare le derivate destra e sinistra in $x = 0$ con il limite del rapporto incrementale. Si ha $f'_{\pm}(0) = 12$, pertanto la funzione è anche derivabile in $x = 0$.

5. L'area del trapezoide si ottiene calcolando $A = \displaystyle\int_0^{\pi/3} |f(x)| dx$. Si ha che $f(x) \geq 0$ quando $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \right]$, quindi

$$A = \int_0^{\pi/4} -f(x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/3} f(x) dx.$$

Applicando la sostituzione $y = \tan(x)$, si ottiene $A = 9 \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} 3^{3/4} - 3^{1/2} \right)$.
