Analisi Matematica 1 - Appello 4 settembre 2023

Corso di laurea INFLT-ETELT Cognomi (M-Z)

Il NUMERO della FILA è contenuto nel testo dell'esercizio numero 5 ed è la costante sommata a $|x|$ nel denominatore della prima frazione.

Fila 1

1. *Dominio:* $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$; la funzione è pari;

Osservazione: poiché la funzione è pari, si può studiare la funzione per le sole $x > 0$ e quindi dedurre il comportamento di f quando $x < 0$ per simmetria.

Limiti: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \nexists$ perché la funzione è periodica (quindi la funzione non ammette asintoti orizzontali e obliqui);
la funzione non ammette asintoti verticali in quanto il dominio di f è tutto $\mathbb{R}$.

Derivata:

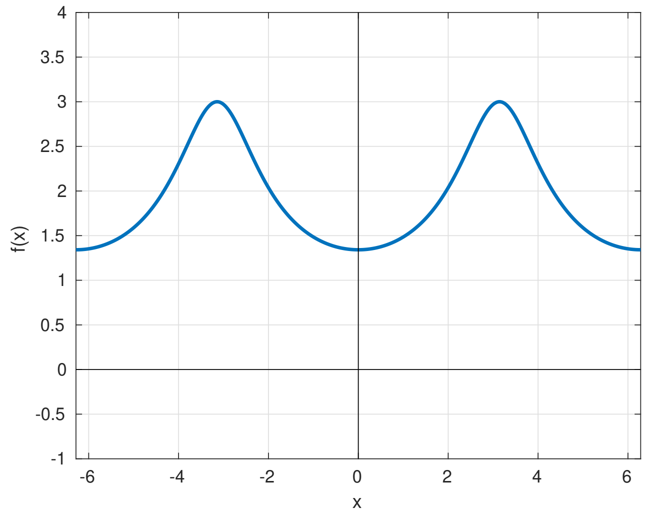
$$f'(x) = \frac{3\sin x}{(3 + 2\cos x)^{3/2}}$$

$dom(f') = dom(f)$, quindi non ci sono punti di non derivabilità.

Punti stazionari:
$f'(x) = 0$ se e solo se $\sin x = 0$, quindi $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Segno di f':
$f'(x) > 0$ quando $\sin x \geq 0$, quindi $x \in]2k\pi, \pi + 2k\pi[$ con $k \in \mathbb{Z}$, qui f è crescente; altrove f è decrescente;
i punti $x = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, sono punti di minimo assoluto e relativo, mentre i punti $\pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, sono di massimo assoluto e relativo.

Punti di flesso:
Poiché la funzione è continua e derivabile su tutto il suo dominio, tra $x = 2k\pi$ (punto di minimo relativo stazionario) e $x = \pi + 2k\pi$ (punto di massimo relativo stazionario) troviamo sempre almeno un punto di flesso. Discorso analogo vale tra $x = \pi + 2k\pi$ e $x = 2\pi + 2k\pi$. Quindi la funzione ha infiniti punti di flesso.



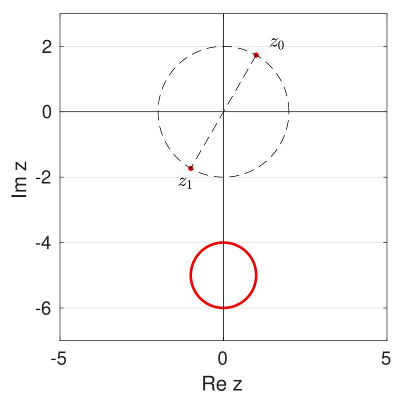
2. La legge di annullamento del prodotto dice che un prodotto è nullo se e solo se almeno uno dei fattori si annulla. Pertanto l'insieme delle soluzioni dell'equazione data è l'unione degli insiemi delle soluzioni delle due equazioni

$$|z+5i|-1=0 \quad e \quad z^2+\frac{4e^{i\frac{7}{6}\pi}}{\bar{i}}=0.$$

L'insieme delle soluzioni della prima equazione è la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $-5i$ e raggio 1, mentre la seconda equazione è equivalente a

$$z^2=4e^{i\frac{2}{3}\pi},$$

che ha soluzioni $z_0=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ e $z_1=2e^{i\frac{4}{3}\pi}$. Il luogo geometrico cercato è $\mathcal{C}\cup\{z_0,z_1\}$.



3. La serie è di segno qualsiasi per la presenza del coseno che continua a oscillare per $n\to\infty$, di conseguenza ne studiamo la convergenza assoluta. Denotando con a_n il termine generale della serie data, abbiamo che $|a_n|\le\left|\sqrt{1+\frac{6}{n^2}}-1\right|=\left(\sqrt{1+\frac{6}{n^2}}-1\right)$ (chiamo b_n l'ultimo termine scritto). La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ converge grazie al criterio del confronto asintotico, in quanto si comporta come la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Segue che, per il criterio del confronto (non asintotico), la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ converge e quindi la serie data converge assolutamente.

4. $\ell = +\infty$

5. La prima frazione della funzione integranda è dispari, di conseguenza il suo integrale sull'intervallo $[-1, 1]$ è nullo. Rimane l'integrale della seconda frazione che vale $I = \log \frac{13}{9}$.

Fila 2

1. *Dominio:* $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$; la funzione è pari;

Osservazione: poiché la funzione è pari, si può studiare la funzione per le sole $x > 0$ e quindi dedurre il comportamento di f quando $x < 0$ per simmetria.

Limiti: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \nexists$ perché la funzione è periodica (quindi la funzione non ammette asintoti orizzontali e obliqui);
la funzione non ammette asintoti verticali in quanto il dominio di f è tutto $\mathbb{R}$.

Derivata:

$$f'(x) = \frac{10 \sin x}{(5 + 4 \cos x)^{3/2}}$$

$dom(f') = dom(f)$, quindi non ci sono punti di non derivabilità.

Punti stazionari:
$f'(x) = 0$ se e solo se $\sin x = 0$, quindi $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Segno di f':
$f'(x) > 0$ quando $\sin x \geq 0$, quindi $x \in]2k\pi, \pi + 2k\pi[$ con $k \in \mathbb{Z}$, qui f è crescente; altrove f è decrescente;
i punti $x = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, sono punti di minimo assoluto e relativo, mentre i punti $\pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, sono di massimo assoluto e relativo.

Punti di flesso:
Poiché la funzione è continua e derivabile su tutto il suo dominio, tra $x = 2k\pi$ (punto di minimo relativo stazionario) e $x = \pi + 2k\pi$ (punto di massimo relativo stazionario) troviamo sempre almeno un punto di flesso. Discorso analogo vale tra $x = \pi + 2k\pi$ e $x = 2\pi + 2k\pi$. Quindi la funzione ha infiniti punti di flesso.

2. La legge di annullamento del prodotto dice che un prodotto è nullo se e solo se almeno uno dei fattori si annulla. Pertanto l'insieme delle soluzioni dell'equazione data è l'unione degli insiemi delle soluzioni delle due equazioni

$$|z + 4i| - 1 = 0 \quad e \quad z^2 + \frac{16e^{i\frac{7}{6}\pi}}{\bar{i}} = 0.$$

L'insieme delle soluzioni della prima equazione è la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $-4i$ e raggio 1, mentre la seconda equazione è equivalente a

$$z^2 = 16e^{i\frac{2}{3}\pi},$$

che ha soluzioni $z_0 = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$ e $z_1 = 4e^{i\frac{4}{3}\pi}$. Il luogo geometrico cercato è $\mathcal{C} \cup \{z_0, z_1\}$.

3. La serie è di segno qualsiasi per la presenza del coseno che continua a oscillare per $n \to \infty$, di conseguenza ne studiamo la convergenza assoluta. Denotando con a_n il termine generale della serie data, abbiamo che $|a_n| \le \left|\sqrt{1+\frac{5}{n^4}}-1\right| = \left(\sqrt{1+\frac{5}{n^4}}-1\right)$ (chiamo b_n l'ultimo termine scritto). La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge grazie al criterio del confronto asintotico, in quanto si comporta come la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$. Segue che, per il criterio del confronto (non asintotico), la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge e quindi la serie data converge assolutamente.

4. $\ell = +\infty$

5. La prima frazione della funzione integranda è dispari, di conseguenza il suo integrale sull'intervallo $[-1,1]$ è nullo. Rimane l'integrale della seconda frazione che vale $I = \log \frac{11}{7}$.

Fila 3

1. *Dominio:* $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$; la funzione è pari;

Osservazione: poiché la funzione è pari, si può studiare la funzione per le sole $x > 0$ e quindi dedurre il comportamento di f quando $x < 0$ per simmetria.

Limiti: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \nexists$ perché la funzione è periodica (quindi la funzione non ammette asintoti orizzontali e obliqui);
la funzione non ammette asintoti verticali in quanto il dominio di f è tutto $\mathbb{R}$.

Derivata:

$$f'(x) = \frac{21 \sin x}{(7 + 6\cos x)^{3/2}}$$

$dom(f') = dom(f)$, quindi non ci sono punti di non derivabilità.

Punti stazionari:
$f'(x) = 0$ se e solo se $\sin x = 0$, quindi $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Segno di f':
$f'(x) > 0$ quando $\sin x \ge 0$, quindi $x \in]2k\pi, \pi + 2k\pi[$ con $k \in \mathbb{Z}$, qui f è crescente; altrove f è decrescente;
i punti $x = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, sono punti di minimo assoluto e relativo, mentre i punti $\pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, sono di massimo assoluto e relativo.

Punti di flesso:
Poiché la funzione è continua e derivabile su tutto il suo dominio, tra $x = 2k\pi$ (punto di minimo relativo stazionario) e $x = \pi + 2k\pi$ (punto di massimo relativo stazionario) troviamo sempre almeno un punto di flesso. Discorso analogo vale tra $x = \pi + 2k\pi$ e $x = 2\pi + 2k\pi$. Quindi la funzione ha infiniti punti di flesso.

2. La legge di annullamento del prodotto dice che un prodotto è nullo se e solo se almeno uno dei fattori si annulla. Pertanto l'insieme delle soluzioni dell'equazione data è l'unione degli insiemi delle soluzioni delle due equazioni

$$|z+3i|-1=0 \quad e \quad z^2+\frac{36e^{i\frac{7}{6}\pi}}{\bar{i}}=0.$$

L'insieme delle soluzioni della prima equazione è la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $-3i$ e raggio 1, mentre la seconda equazione è equivalente a

$$z^2=36e^{i\frac{2}{3}\pi},$$

che ha soluzioni $z_0=6e^{i\frac{\pi}{3}}$ e $z_1=6e^{i\frac{4}{3}\pi}$. Il luogo geometrico cercato è $\mathcal{C}\cup\{z_0,z_1\}$.

3. La serie è di segno qualsiasi per la presenza del coseno che continua a oscillare per $n\to\infty$, di conseguenza ne studiamo la convergenza assoluta. Denotando con a_n il termine generale della serie data, abbiamo che $|a_n|\leq\left|\sqrt{1+\frac{4}{n^6}}-1\right|=\left(\sqrt{1+\frac{4}{n^6}}-1\right)$ (chiamo b_n l'ultimo termine scritto). La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ converge grazie al criterio del confronto asintotico, in quanto si comporta come la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$. Segue che, per il criterio del confronto (non asintotico), la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ converge e quindi la serie data converge assolutamente.

4. $\ell=+\infty$

5. La prima frazione della funzione integranda è dispari, di conseguenza il suo integrale sull'intervallo $[-1,1]$ è nullo. Rimane l'integrale della seconda frazione che vale $I=\log\frac{9}{5}$.

Fila 4

1. *Dominio:* $\operatorname{dom} f=\mathbb{R}$; la funzione è pari;

Osservazione: poiché la funzione è pari, si può studiare la funzione per le sole $x>0$ e quindi dedurre il comportamento di f quando $x<0$ per simmetria.

Limiti: $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\nexists$ perché la funzione è periodica (quindi la funzione non ammette asintoti orizzontali e obliqui);
la funzione non ammette asintoti verticali in quanto il dominio di f è tutto $\mathbb{R}$.

Derivata:

$$f'(x)=\frac{36\sin x}{(9+8\cos x)^{3/2}}$$

$dom(f')=dom(f)$, quindi non ci sono punti di non derivabilità.

Punti stazionari:
$f'(x)=0$ se e solo se $\sin x=0$, quindi $x=k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$.

Segno di f':
$f'(x) > 0$ quando $\sin x \geq 0$, quindi $x \in]2k\pi, \pi + 2k\pi[$ con $k \in \mathbb{Z}$, qui f è crescente; altrove f è decrescente;
i punti $x = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, sono punti di minimo assoluto e relativo, mentre i punti $\pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, sono di massimo assoluto e relativo.

Punti di flesso:
Poiché la funzione è continua e derivabile su tutto il suo dominio, tra $x = 2k\pi$ (punto di minimo relativo stazionario) e $x = \pi + 2k\pi$ (punto di massimo relativo stazionario) troviamo sempre almeno un punto di flesso. Discorso analogo vale tra $x = \pi + 2k\pi$ e $x = 2\pi + 2k\pi$. Quindi la funzione ha infiniti punti di flesso.

2. La legge di annullamento del prodotto dice che un prodotto è nullo se e solo se almeno uno dei fattori si annulla. Pertanto l'insieme delle soluzioni dell'equazione data è l'unione degli insiemi delle soluzioni delle due equazioni

$$|z + 2i| - 1 = 0 \quad e \quad z^2 + \frac{64e^{i\frac{7}{6}\pi}}{\bar{i}} = 0.$$

L'insieme delle soluzioni della prima equazione è la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $-2i$ e raggio 1, mentre la seconda equazione è equivalente a

$$z^2 = 64e^{i\frac{2}{3}\pi},$$

che ha soluzioni $z_0 = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$ e $z_1 = 8e^{i\frac{4}{3}\pi}$. Il luogo geometrico cercato è $\mathcal{C} \cup \{z_0, z_1\}$.

3. La serie è di segno qualsiasi per la presenza del coseno che continua a oscillare per $n \to \infty$, di conseguenza ne studiamo la convergenza assoluta. Denotando con a_n il termine generale della serie data, abbiamo che $|a_n| \leq \left|\sqrt{1 + \frac{3}{n^8}} - 1\right| = \left(\sqrt{1 + \frac{3}{n^8}} - 1\right)$ (chiamo b_n l'ultimo termine scritto). La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge grazie al criterio del confronto asintotico, in quanto si comporta come la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8}$. Segue che, per il criterio del confronto (non asintotico), la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge e quindi la serie data converge assolutamente.

4. $\ell = +\infty$

5. La prima frazione della funzione integranda è dispari, di conseguenza il suo integrale sull'intervallo $[-1, 1]$ è nullo. Rimane l'integrale della seconda frazione che vale $I = \log \frac{7}{3}$.