Analisi Matematica 1 - Appello 3 aprile 2023

Corso di laurea INFLT-ETELT Cognomi (M-Z)

Il NUMERO della FILA è contenuto nel testo dell' esercizio numero 1 ed è la metà della costante che compare nel logaritmo quando $x \geq 0$.

Fila 1

1. *Dominio:* $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$; la funzione non presenta simmetrie.

Osservazione: per $x < 0$ la funzione è una retta con coefficiente angolare negativo, quindi lo studio di questo tratto di funzione è molto semplice.

Limiti: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, poichè la funzione è una retta per $x < 0$, non ha senso cercare asintoti;
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, inoltre la retta $y = x$ è asintoto obliquo destro;
$\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = \log(3) \in \mathbb{R}$, quindi la funzione non presenta asintoti verticali.

Continuità in $x = 0$:
abbiamo già visto che $\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = \log(3)$, poiché si ha anche $f(0) = \log(3)$, allora la funzione è continua in $x = 0$.

Derivata:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ \frac{1+e^x}{x+e^x+2} & x > 0 \end{cases}$$

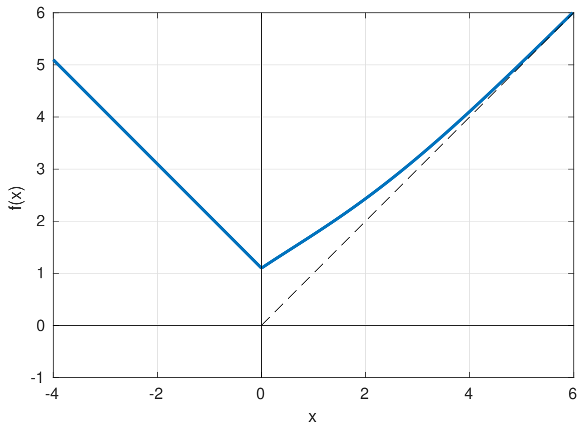
f' è ben definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Vediamo cosa succede in $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -1, \qquad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \frac{2}{3},$$

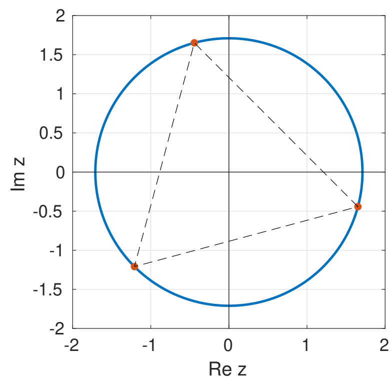
quindi $x = 0$ è un punto angoloso di minimo (perché la derivata sinistra è negativa e quella destra è positiva, cioè f decresce in un intorno sinistro e cresce in un intorno destro di $x = 0$) e $dom(f') = dom(f) \setminus \{0\}$.

Segno di f': $f'(x) < 0$ per ogni $x < 0$, quindi qui f è decrescente; poiché $e^x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quando $x > 0$, sia il numeratore che il denominatore di f' sono positivi, quindi $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$, quindi in questo intervallo f è crescente. Segue che $x = 0$ è punto angoloso di minimo relativo e assoluto. f non ammette massimi in quanto è superiormente illimitata.

Disegno: non avendo studiato il segno della derivata seconda, non abbiamo informazioni sulla concavità/convessità. Con le informazioni che abbiamo a disposizione il disegno più semplice che possiamo tracciare è di una curva con la concavità rivolta verso l'alto, in quando è facile vedere che f rimane sempre sopra l'asintoto. Uno studio del segno della derivata seconda lo conferma.



2. Si ha $w = 5e^{\frac{\pi}{4}i}$. Le radici terze di $\overline{w} = 5e^{-\frac{\pi}{4}i}$ sono $z_0 = \sqrt[3]{5}e^{-\frac{\pi}{12}i}$, $z_1 = \sqrt[3]{5}e^{\frac{7}{12}\pi i}$, $z_2 = \sqrt[3]{5}e^{\frac{15}{12}\pi i}$.



3. La serie è a segni alterni. Non converge assolutamente perché $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ si comporta asintoticamente come $\frac{1}{n^{1/2}}$ (serie armonica generalizzata con $\alpha < 1$). Tuttavia la serie converge semplicemente, lo si dimostra applicando il criterio di Leibniz.

4. Il limite vale $\ell = \frac{1}{49}$ se $\alpha = \frac{3}{2}$; $\ell = 0$ se $0 < \alpha < \frac{3}{2}$; $\ell = +\infty$ se $\alpha > \frac{3}{2}$.

5. La media integrale vale $\frac{4}{5\pi}(\sqrt{10} - \sqrt{5})$.

Fila 2

1. *Dominio:* dom $f = \mathbb{R}$; la funzione non presenta simmetrie.

Osservazione: per $x < 0$ la funzione è una retta con coefficiente angolare negativo, quindi lo studio di questo tratto di funzione è molto semplice.

Limiti: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, poichè la funzione è una retta per $x < 0$, non ha senso cercare asintoti;
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, inoltre la retta $y = x$ è asintoto obliquo destro;
$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \log(5) \in \mathbb{R}$, quindi la funzione non presenta asintoti verticali.

Continuità in $x = 0$:
abbiamo già visto che $\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \log(5)$, poiché si ha anche $f(0) = \log(5)$, allora la funzione è continua in $x = 0$.

Derivata:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ \frac{1+e^x}{x+e^x+4} & x > 0 \end{cases}$$

f' è ben definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Vediamo cosa succede in $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -1, \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \frac{2}{5},$$

quindi $x = 0$ è un punto angoloso di minimo (perché la derivata sinistra è negativa e quella destra è positiva, cioè f decresce in un intorno sinistro e cresce in un intorno destro di $x = 0$) e $dom(f') = dom(f) \setminus \{0\}$.

Segno di f': $f'(x) < 0$ per ogni $x < 0$, quindi qui f è decrescente; poiché $e^x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quando $x > 0$, sia il numeratore che il denominatore di f' sono positivi, quindi $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$, quindi in questo intervallo f è crescente. Segue che $x = 0$ è punto angoloso di minimo relativo e assoluto. f non ammette massimi in quanto è superiormente illimitata.

Disegno: non avendo studiato il segno della derivata seconda, non abbiamo informazioni sulla concavità/convessità. Con le informazioni che abbiamo a disposizione il disegno più semplice che possiamo tracciare è di una curva con la concavità rivolta verso l'alto, in quando è facile vedere che f rimane sempre sopra l'asintoto. Uno studio del segno della derivata seconda lo conferma.

2. Si ha $w = 4e^{\frac{\pi}{4}i}$. Le radici terze di $\overline{w} = 4e^{-\frac{\pi}{4}i}$ sono $z_0 = \sqrt[3]{4}e^{-\frac{\pi}{12}i}$, $z_1 = \sqrt[3]{4}e^{\frac{7}{12}\pi i}$, $z_2 = \sqrt[3]{4}e^{\frac{15}{12}\pi i}$.

3. La serie è a segni alterni. Non converge assolutamente perché $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ si comporta asintoticamente come $\frac{1}{n^{1/2}}$ (serie armonica generalizzata con $\alpha < 1$). Tuttavia la serie converge semplicemente, lo si dimostra applicando il criterio di Leibniz.

4. Il limite vale $\ell = \frac{1}{36}$ se $\alpha = \frac{3}{2}$; $\ell = 0$ se $0 < \alpha < \frac{3}{2}$; $\ell = +\infty$ se $\alpha > \frac{3}{2}$.

5. La media integrale vale $\frac{4}{5\pi}(\sqrt{11} - \sqrt{6})$.

Fila 3

1. *Dominio:* $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$; la funzione non presenta simmetrie.

Osservazione: per $x < 0$ la funzione è una retta con coefficiente angolare negativo, quindi lo studio di questo tratto di funzione è molto semplice.

Limiti: $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$, poichè la funzione è una retta per $x < 0$, non ha senso cercare asintoti;
$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, inoltre la retta $y = x$ è asintoto obliquo destro;
$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \log(7) \in \mathbb{R}$, quindi la funzione non presenta asintoti verticali.

Continuità in $x = 0$:
abbiamo già visto che $\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \log(7)$, poiché si ha anche $f(0) = \log(7)$, allora la funzione è continua in $x = 0$.

Derivata:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ \frac{1+e^x}{x+e^x+6} & x > 0 \end{cases}$$

f' è ben definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Vediamo cosa succede in $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -1, \qquad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \frac{2}{7},$$

quindi $x = 0$ è un punto angoloso di minimo (perché la derivata sinistra è negativa e quella destra è positiva, cioè f decresce in un intorno sinistro e cresce in un intorno destro di $x = 0$) e $dom(f') = dom(f) \setminus \{0\}$.

Segno di f': $f'(x) < 0$ per ogni $x < 0$, quindi qui f è decrescente; poiché $e^x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quando $x > 0$, sia il numeratore che il denominatore di f' sono positivi, quindi $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$, quindi in questo intervallo f è crescente. Segue che $x = 0$ è punto angoloso di minimo relativo e assoluto. f non ammette massimi in quanto è superiormente illimitata.

Disegno: non avendo studiato il segno della derivata seconda, non abbiamo informazioni sulla concavità/convessità. Con le informazioni che abbiamo a disposizione il disegno più semplice che possiamo tracciare è di una curva con la concavità rivolta verso l'alto, in quando è facile vedere che f rimane sempre sopra l'asintoto. Uno studio del segno della derivata seconda lo conferma.

2. Si ha $w = 3e^{\frac{\pi}{4}i}$. Le radici terze di $\overline{w} = 3e^{-\frac{\pi}{4}i}$ sono $z_0 = \sqrt[3]{3}e^{-\frac{\pi}{12}i}$, $z_1 = \sqrt[3]{3}e^{\frac{7}{12}\pi i}$, $z_2 = \sqrt[3]{3}e^{\frac{15}{12}\pi i}$.

3. La serie è a segni alterni. Non converge assolutamente perché $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ si comporta asintoticamente come $\frac{1}{n^{1/2}}$ (serie armonica generalizzata con $\alpha < 1$). Tuttavia la serie converge semplicemente, lo si dimostra applicando il criterio di Leibniz.

4. Il limite vale $\ell = \frac{1}{25}$ se $\alpha = \frac{3}{2}$; $\ell = 0$ se $0 < \alpha < \frac{3}{2}$; $\ell = +\infty$ se $\alpha > \frac{3}{2}$.

5. La media integrale vale $\frac{4}{5\pi}(\sqrt{12} - \sqrt{7})$.

Fila 4

1. *Dominio:* $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$; la funzione non presenta simmetrie.

Osservazione: per $x < 0$ la funzione è una retta con coefficiente angolare negativo, quindi lo studio di questo tratto di funzione è molto semplice.

Limiti: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, poichè la funzione è una retta per $x < 0$, non ha senso cercare asintoti;
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, inoltre la retta $y = x$ è asintoto obliquo destro;
$\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = \log(9) \in \mathbb{R}$, quindi la funzione non presenta asintoti verticali.

Continuità in $x = 0$:
abbiamo già visto che $\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = \log(9)$, poiché si ha anche $f(0) = \log(9)$, allora la funzione è continua in $x = 0$.

Derivata:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ \frac{1+e^x}{x+e^x+8} & x > 0 \end{cases}$$

f' è ben definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Vediamo cosa succede in $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -1, \qquad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \frac{2}{9},$$

quindi $x = 0$ è un punto angoloso di minimo (perché la derivata sinistra è negativa e quella destra è positiva, cioè f decresce in un intorno sinistro e cresce in un intorno destro di $x = 0$) e $dom(f') = dom(f) \setminus \{0\}$.

Segno di f': $f'(x) < 0$ per ogni $x < 0$, quindi qui f è decrescente; poiché $e^x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quando $x > 0$, sia il numeratore che il denominatore di f' sono positivi, quindi $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$, quindi in questo intervallo f è crescente. Segue che $x = 0$ è punto angoloso di minimo relativo e assoluto. f non ammette massimi in quanto è superiormente illimitata.

Disegno: non avendo studiato il segno della derivata seconda, non abbiamo informazioni sulla concavità/convessità. Con le informazioni che abbiamo a disposizione il disegno più semplice che possiamo tracciare è di una curva con la concavità rivolta verso l'alto, in quando è facile vedere che f rimane sempre sopra l'asintoto. Uno studio del segno della derivata seconda lo conferma.

2. Si ha $w = 2e^{\frac{\pi}{4}i}$. Le radici terze di $\overline{w} = 2e^{-\frac{\pi}{4}i}$ sono $z_0 = \sqrt[3]{2}e^{-\frac{\pi}{12}i}$, $z_1 = \sqrt[3]{2}e^{\frac{7}{12}\pi i}$, $z_2 = \sqrt[3]{2}e^{\frac{15}{12}\pi i}$.

3. La serie è a segni alterni. Non converge assolutamente perché $\sum_{n \geq 1} |a_n|$ si comporta asintoticamente come $\frac{1}{n^{1/2}}$ (serie armonica generalizzata con $\alpha < 1$). Tuttavia la serie converge semplicemente, lo si dimostra applicando il criterio di Leibniz.

4. Il limite vale $\ell = \frac{1}{16}$ se $\alpha = \frac{3}{2}$; $\ell = 0$ se $0 < \alpha < \frac{3}{2}$; $\ell = +\infty$ se $\alpha > \frac{3}{2}$.

5. La media integrale vale $\frac{4}{5\pi}(\sqrt{13} - \sqrt{8})$.