Analisi Matematica 1 - Appello 15 giugno 2022

Corso di laurea INFLT-ETELT Cognomi (M-Z)

Il NUMERO della FILA è contenuto nel testo dell' esercizio numero 5 ed è il numero intero che precede il valore di $y'(0)$.

Fila 1

1. $\operatorname{dom} f =]-\infty, +\infty[$;

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$; $y = \frac{x}{2} + \log 5$ è asintoto obliquo sinistro; f non ammette altri asinototi.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, e $f(0) = 0$, quindi f è continua in $x = 0$; quando $x > 0$ la funzione è continua perchè è funzione elementare; quando $x < 0$ la funzione è continua perché somma e composizione di funzioni elementari continue;

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{4e^x}{1+4e^x} & x < 0 \\ \frac{1}{3}x^{-2/3} & x > 0 \end{cases}$$

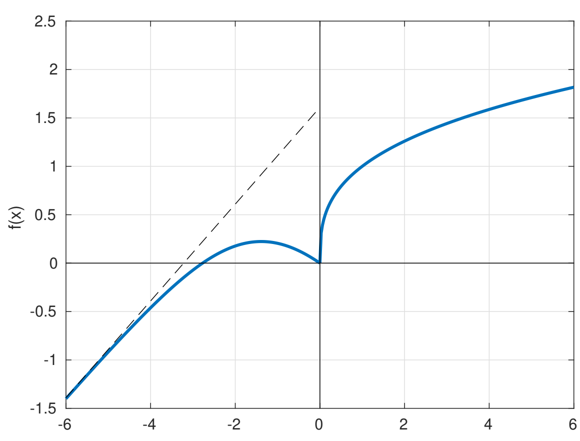
$\lim_{x\to 0^-} f'(x)$ è un valore finito negativo, mentre $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$, quindi f non è derivabile in $x = 0$; $x = 0$ è un punto angoloso per f, $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f \setminus \{0\}$;

Quando $x < 0$, risulta che $x = -\log(4)$ è punto stazionario di massimo relativo per f, infatti $f'(x) \geq 0$ (ovvero f è crescente) quando $x \in]-\infty, -\log(4)[$ e $f'(x) \leq 0$ (ovvero f è decrescente) quando $x \in]-\log(4), 0[$.

Quando $x > 0$ possiamo già disegnare la funzione elementare $\sqrt[3]{x}$, sappiamo che è monotona crescente e concava.

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{4e^x}{(1+4e^x)^2} & x < 0 \\ -\frac{2}{9}x^{-5/3} & x > 0 \end{cases}$$

f'' risulta sempre negativa sia in $]-\infty, 0[$ che in $]0, +\infty[$, quindi f è concava in $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ e non presenta punti di flesso.



Dopo aver rappresentato graficamente f, classifichiamo i punti di estremo su tutto il dominio. Vediamo che:

$x = -\log(4)$ è punto di massimo relativo, $x = 0$ è punto di minimo relativo; f non presenta punti di massimo o minimo assoluti in quanto è illimitata.

La media integrale di f sull'intervallo $[0, 1]$ vale $3/4$.

2. Il luogo geometrico è l'intersezione tra la circonferenza di centro $C = (2, 2)$ e raggio $r = \sqrt{3}$, il semipiano $y \geq x$ e l'insieme delle $x \neq 0$.

3. Il limite vale $\ell = 1$.

4. La serie converge.

5. La soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = (3 - \frac{1}{2}x)e^x - \frac{1}{2}\sin x$.

Fila 2

1. $\operatorname{dom} f =]-\infty, +\infty[$;

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$; $y = \frac{x}{3} + \log 8$ è asintoto obliquo sinistro; f non ammette altri asinototi.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, e $f(0) = 0$, quindi f è continua in $x = 0$; quando $x > 0$ la funzione è continua perchè è funzione elementare; quando $x < 0$ la funzione è continua perché somma e composizione di funzioni elementari continue;

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{6e^x}{1+6e^x} & x < 0 \\ \frac{1}{3}x^{-2/3} & x > 0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0^-} f'(x)$ è un valore finito negativo, mentre $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$, quindi f non è derivabile in $x = 0$; $x = 0$ è un punto angoloso per f, $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f \setminus \{0\}$;

Quando $x < 0$, risulta che $x = -\log(12)$ è punto stazionario di massimo relativo per f, infatti $f'(x) \geq 0$ (ovvero f è crescente) quando $x \in]-\infty, -\log(12)[$ e $f'(x) \leq 0$ (ovvero f è decrescente) quando $x \in]-\log(12), 0[$.

Quando $x > 0$ possiamo già disegnare la funzione elementare $\sqrt[3]{x}$, sappiamo che è monotona crescente e concava.

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{6e^x}{(1+6e^x)^2} & x < 0 \\ -\frac{2}{9}x^{-5/3} & x > 0 \end{cases}$$

f'' risulta sempre negativa sia in $]-\infty, 0[$ che in $]0, +\infty[$, quindi f è concava in $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ e non presenta punti di flesso.

Dopo aver rappresentato graficamente f, classifichiamo i punti di estremo su tutto il dominio. Vediamo che:

$x = -\log(12)$ è punto di massimo relativo, $x = 0$ è punto di minimo relativo; f non presenta punti di massimo o minimo assoluti in quanto è illimitata.

La media integrale di f sull'intervallo $[0, 1]$ vale $3/4$.

2. Il luogo geometrico è l'intersezione tra la circonferenza di centro $C = (3, 3)$ e raggio $r = 2\sqrt{3}$, il semipiano $y \geq x$ e l'insieme delle $x \neq 0$.

3. Il limite vale $\ell = 1$.

4. La serie converge.

5. La soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = (4 - \frac{1}{2}x)e^x - \frac{1}{2}\sin x$.

Fila 3

1. $\operatorname{dom} f =]-\infty, +\infty[$;

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$; $y = \frac{x}{4} + \log 11$ è asintoto obliquo sinistro; f non ammette altri asinototi.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, e $f(0) = 0$, quindi f è continua in $x = 0$; quando $x > 0$ la funzione è continua perchè è funzione elementare; quando $x < 0$ la funzione è continua perché somma e composizione di funzioni elementari continue;

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{8e^x}{1+8e^x} & x < 0 \\ \frac{1}{3}x^{-2/3} & x > 0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0^-} f'(x)$ è un valore finito negativo, mentre $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$, quindi f non è derivabile in $x = 0$; $x = 0$ è un punto angoloso per f, $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f \setminus \{0\}$;

Quando $x < 0$, risulta che $x = -\log(24)$ è punto stazionario di massimo relativo per f, infatti $f'(x) \geq 0$ (ovvero f è crescente) quando $x \in]-\infty, -\log(24)[$ e $f'(x) \leq 0$ (ovvero f è decrescente) quando $x \in]-\log(24), 0[$.

Quando $x > 0$ possiamo già disegnare la funzione elementare $\sqrt[3]{x}$, sappiamo che è monotona crescente e concava.

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{8e^x}{(1+8e^x)^2} & x < 0 \\ -\frac{2}{9}x^{-5/3} & x > 0 \end{cases}$$

f'' risulta sempre negativa sia in $]-\infty, 0[$ che in $]0, +\infty[$, quindi f è concava in $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ e non presenta punti di flesso.

Dopo aver rappresentato graficamente f, classifichiamo i punti di estremo su tutto il dominio. Vediamo che:

$x = -\log(24)$ è punto di massimo relativo, $x = 0$ è punto di minimo relativo; f non presenta punti di massimo o minimo assoluti in quanto è illimitata.

La media integrale di f sull'intervallo $[0, 1]$ vale $3/4$.

2. Il luogo geometrico è l'intersezione tra la circonferenza di centro $C = (4, 4)$ e raggio $r = 3\sqrt{3}$, il semipiano $y \geq x$ e l'insieme delle $x \neq 0$.

3. Il limite vale $\ell = 1$.

4. La serie converge.

5. La soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = (5 - \frac{1}{2}x)e^x - \frac{1}{2}\sin x$.

Fila 4

1. $\operatorname{dom} f =]-\infty, +\infty[$;

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$; $y = \frac{x}{5} + \log 14$ è asintoto obliquo sinistro; f non ammette altri asinototi.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, e $f(0) = 0$, quindi f è continua in $x = 0$; quando $x > 0$ la funzione è continua perchè è funzione elementare; quando $x < 0$ la funzione è continua perché somma e composizione di funzioni elementari continue;

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} - \frac{10e^x}{1+10e^x} & x < 0 \\ \frac{1}{3}x^{-2/3} & x > 0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0^-} f'(x)$ è un valore finito negativo, mentre $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$, quindi f non è derivabile in $x = 0$; $x = 0$ è un punto angoloso per f, $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f \setminus \{0\}$;

Quando $x < 0$, risulta che $x = -\log(40)$ è punto stazionario di massimo relativo per f, infatti $f'(x) \geq 0$ (ovvero f è crescente) quando $x \in]-\infty, -\log(40)[$ e $f'(x) \leq 0$ (ovvero f è decrescente) quando $x \in]-\log(40), 0[$.

Quando $x > 0$ possiamo già disegnare la funzione elementare $\sqrt[3]{x}$, sappiamo che è monotona crescente e concava.

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{10e^x}{(1+10e^x)^2} & x < 0 \\ -\frac{2}{9}x^{-5/3} & x > 0 \end{cases}$$

f'' risulta sempre negativa sia in $]-\infty, 0[$ che in $]0, +\infty[$, quindi f è concava in $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ e non presenta punti di flesso.

Dopo aver rappresentato graficamente f, classifichiamo i punti di estremo su tutto il dominio. Vediamo che:

$x = -\log(40)$ è punto di massimo relativo, $x = 0$ è punto di minimo relativo; f non presenta punti di massimo o minimo assoluti in quanto è illimitata.

La media integrale di f sull'intervallo $[0, 1]$ vale $3/4$.

2. Il luogo geometrico è l'intersezione tra la circonferenza di centro $C = (5, 5)$ e raggio $r = 4\sqrt{3}$, il semipiano $y \geq x$ e l'insieme delle $x \neq 0$.

3. Il limite vale $\ell = 1$.

4. La serie converge.

5. La soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = (6 - \frac{1}{2}x)e^x - \frac{1}{2}\sin x$.