1. Sia data la funzione $f : dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) = \arctan|x| - \frac{2x}{x^2+1}.$$

$dom(f) =]-\infty, +\infty[$; f non presenta simmetrie;

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$; $y = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale completo; f non ammette asintoti obliqui, nè verticali;

$$f'(x) = \frac{\frac{|x|}{x}(x^2+1) + 2x^2 - 2}{(x^2+1)^2} = \begin{cases} \dfrac{3x^2-1}{(x^2+1)^2} & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{x^2-3}{(x^2+1)^2} & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

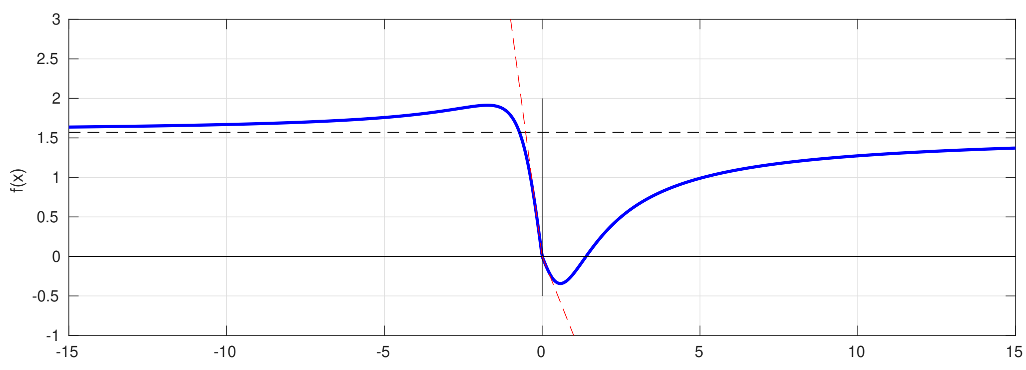
dom $f' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x = 0$ è punto angoloso, si ha $f'_-(0) = -3$, $f'_+(0) = -1$;

$x = 1/\sqrt{3}$, $x = -\sqrt{3}$ sono punti stazionari; f è crescente in $]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]1/\sqrt{3}, +\infty[$ e descrescente in $]-\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}[$;

$x = -\sqrt{3}$ è punto di massimo relativo e assoluto stazionario; $x = 1/\sqrt{3}$ è punto di minimo relativo e assoluto stazionario;

La funzione ammette sicuramente un punto di flesso nell'intervallo $]-\infty, -\sqrt{3}[$ in quanto per $x \to -\infty$ la funzione tende all'asitoto orizzontale dall'alto (quindi ha concavità verso l'alto), mentre in un intorno del punto di massimo relativo stazionario $x = -\sqrt{3}$ la concavità è rivolta verso il basso.

La funzione ammette sicuramente un punto di flesso nell'intervallo $]1\sqrt{3}, +\infty[$, in quanto in un intorno del punto di minimo relativo stazionario $x = 1/\sqrt{3}$ la concavità è rivolta verso l'alto, mentre per $x \to \infty$ la funzione tende all'asintoto orizzontale dal basso e quindi ha concavità verso il basso.



2. Se $\alpha > 1$ il limite esiste e vale $\ell = 0$, altrimenti il limite non esiste.

3. Le primitive di $f(x) = \frac{e^x+1}{\sqrt{e^x-1}}$ sono le funzioni $F(x) = 2\sqrt{e^x-1} + 2\arctan(\sqrt{e^x-1}) + c$ con $c \in \mathbb{R}$.

L'integrale improprio è convergente in quanto

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{\sqrt{e^x - 1}} \sim \frac{2}{\sqrt{x}} \text{ quando } x \to 0^+$$

e $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx \sim 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx.$

Quest'ultimo integrale è convergente in quanto è del tipo $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ con $\alpha = \frac{1}{2} < 1$. Per il criterio del confronto asintotico, converge anche l'integrale dato.

4. La soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = \frac{1}{3}\cos(2x) + 2\sin(2x) + \frac{1}{3}\cos(x)$.