

Istruzioni

1. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, telefoni cellulari, smartphone, smartwatch.
 2. CONSEGNARE **tutti i fogli su cui sono stati eseguiti i conti.**
 3. TEMPO a disposizione: 75 min.
-

Esercizio 1 Sia data la funzione $f : \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) = x((\log x)^2 - 5 \log x + 7)$$

Determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie.

Risposta [punti 1]:

Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per f .

Risposta [punti 3]:

Calcolare la funzione derivata prima di f e determinarne il dominio, classificando eventuali punti di non derivabilità.

Risposta [punti 2]:

Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$.

Risposta [punti 1]:

Studiare la crescita e decrescita di f , calcolando, qualora esistano, punti di massimo/minimo relativo e punti di massimo/minimo assoluto per f .

Risposta [punti 4]:

Calcolare la derivata seconda di f , studiare concavità e convessità e determinare i punti di flesso.

Risposta [punti 2]:

Tracciare sul foglio di protocollo un grafico qualitativo della funzione f , in accordo con i risultati ottenuti.

Risposta [punti 2]:

Esercizio 2 Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\operatorname{Im}(|z - 3i|) + \operatorname{Re}\left(\frac{2z + e^{-3\pi i}}{|\sqrt{3} - i| i}\right) = 2z \cdot \bar{z}$$

Risposta [punti 5]

Esercizio 3 Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, discutere il carattere della serie a termini positivi

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(e^{-\frac{1}{2n^2}} - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^\alpha}{\log(n+1) - \log n}$$

Risposta [punti 5]

Esercizio 4 Dopo aver calcolato le primitive di

$$f(x) = \sin(2x) \log(\cos(x))$$

sull'intervallo $[0, \frac{\pi}{2})$, risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sin(2x) \log(\cos(x)) \\ y(0) = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Risposta [punti 5]
