1. Sia data la funzione $f : dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) = x + \arctan\left(\frac{1}{e^x - 1}\right)$$

$dom(f) =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$; f non presenta simmetrie;

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$; f non ammette asintoti verticali

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$; f ammette asintoti obliqui: $y = x$ per $x \to +\infty$ e $y = x - \frac{\pi}{4}$ per $x \to -\infty$.

$f'(x) = \dfrac{e^{2x} - 3e^x + 2}{1 + (e^x - 1)^2}$; dom $f' =$ dom f, non esistono punti di non derivabilità.

$x = \log 2$ è punto stazionario. f è crescente in $]-\infty, 0[\cup]\log 2, +\infty[$ e descrescente in $]0, \log 2[$.

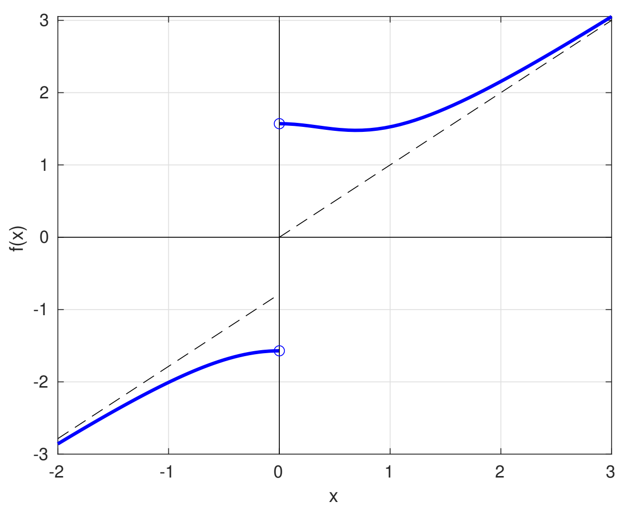
$x = \log 2$ è punto di minimo relativo stazionario, ma non è punto di minimo assoluto; f è illimitata e non presenta punti di massimo/minimo assoluto.

Per x negative non c'è alcuna evidenza che vi sia un flesso, il fatto che f sia crescente e che $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$ induce a concludere che f sia concava su tutto l'intervallo $]-\infty, 0[$, anche se la certezza si ha solo studiando il segno della derivata seconda.

Per x positive abbiamo le seguenti informazioni.

Poiché $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$ e f è decrescente in un intorno destro di $x = 0$, f non può che essere concava in un intorno destro di $x = 0$. In un intorno del punto di minimo relativo $x = \log 2$ la funzione è convessa, quindi esisterà un punto di flesso in $]0, \log 2[$.

Poiché per $x > \log 2$ non abbiamo altri punti stazionari, escludiamo che vi siano punti di flesso a tangente orizzontale che potrebbero permettere un avvicinamento della funzione all'asintoto dal basso. Quindi, a destra di $x = \log 2$ la funzione è crescente e si avvicina all'asintoto dall'alto, questo implica che per $x \to +\infty$ la funzione sia concava e quindi non c'è evidenza che ci siano punti di flesso in $]\log 2, +\infty[$.



2. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n}\right)(n+1)!}{(n-1)! + 2^{-n} + \sin(n!)} = \frac{1}{2},$$

3. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{\frac{5}{4}}$ diverge.

4. Le soluzioni complesse dell'equazione $z^3 = 3\left(e^{i\pi/2} - \dfrac{1}{i}\right)$ sono: $z_0 = \sqrt[3]{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $z_1 = \sqrt[3]{6}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $z_2 = -\sqrt[3]{6}\, i$

5. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 7x & x \leq 0 \\ \dfrac{1 - \cos x}{x^\alpha} \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x > 0 \end{cases}$$

Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la continuità di f in $x = 0$ e classificare l'eventuale punto di discontinuità.

Per $\alpha < 2$, f è continua; per $\alpha \geq 2$, $x = 0$ è un punto di discontinuità di seconda specie

6. $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \log(2x)dx = -\frac{1}{2} + \log 2$

7. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 10\cos(x) \\ y(0) = 2 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} y(x)e^{-2x} = 1 \end{cases}$$

Allora $y(\pi) = e^{2\pi} - 1$.