Es 4 dell'appello e Es 1 del test

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n^{5/2}(2^n+\log n)}{7^n+e^{-n}}}_{a_n}$$ — a_n è a termini positivi

posso applicare il criterio del conf. asintotico

$$a_n \sim \frac{3n^{5/2}\cdot 2^n}{7^n} = b_n$$

infatti: $2^n+\log n \sim 2^n$
$7^n+e^{-n} \sim 7^n$
per $n\to\infty$

- Ora studio $\sum_i b_n$ con il criterio del rapporto:

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1)^{5/2}\cdot 2^{n+1}}{7^{n+1}} \cdot \frac{7^n}{3n^{5/2}\cdot 2^n} = \frac{2}{7} < 1$$

$\Rightarrow$ la serie $\sum_i b_n$ conv

e, per confronto as., converge anche $\sum_i a_n$.

- Avrei potuto anche applicare il criterio della radice (al posto del criterio del rapporto), avrei trovato:

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^{5/2}\cdot\frac{2^n}{7^n}} = \frac{2}{7} \lim_{n\to\infty} 3^{1/n}\cdot n^{\frac{5}{2n}} = (*)$$

$$\lim_{n\to\infty} 3^{\overset{\to 0}{1/n}} = 3^0 = 1, \quad \lim_{n\to\infty} n^{\frac{5}{2n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\overset{\to 0}{\frac{5}{2n}\log n}} = e^0 = 1$$

$(*) = \frac{2}{7} < 1$ (esattamente come prima).

[Attenzione che per le file 4, 5, 6 si otteneva serie divergente, perché risultava $l > 1$].

Es 5 dell'appello e 2 del test

Calcolare $P_2(x)$ che approssima $f(x) = \log(x+3)$ in un intorno di $x_0 = 0$ e

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\log(x+3) - x - 3\log 3}{e^{x^2}(\cosh x - 1)} .$$

$$P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad \text{poiché } x_0 = 0$$

Calcolo $f'(x) = \frac{1}{x+3}$, $f''(x) = -\frac{1}{(x+3)^2}$, allora

$f(0) = \log 3$, $f'(0) = \frac{1}{3}$, $f''(0) = -\frac{1}{9}$

$$P_2(x) = \log 3 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2\cdot 9}x^2$$

e $f(x) = P_2(x) + o(x^2)$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\log(x+3) - x - 3\log 3}{\underbrace{e^{x^2}}_{\downarrow\, 1}(\cosh x - 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{3\log 3 + x - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2) - x - 3\log 3}{1\cdot\left(\cancel{1} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \cancel{1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^2}{\frac{x^2}{2}} = -\frac{1}{3}$$

Es 6 dell'appello e 3 del Test.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}\log(2-x) & \text{se } x \le 1 \\ (x-1)^{\alpha-1} \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{x-1} & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad \text{con } \alpha > 1.$$

Verificare che f è continua in $x=1$:

$$f(1) = -\frac{\pi}{2}\log(2-1) = 0$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\Big[-\frac{\pi}{2}\log\underbrace{(2-x)}_{\to 1}\Big] = 0 \quad (\to 0)$$

è sempre >0 perché $\alpha>1$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} \underbrace{(x-1)^{\alpha-1}}_{\to 0}\,\underbrace{\operatorname{arctg}\Big(\underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\to+\infty}\Big)}_{\to+\frac{\pi}{2}} = 0$$

$\Rightarrow f$ è continua in $x=1$.

Per studiare la derivabilità in $x=1$, prima faccio la sostituzione $t=x-1 \Rightarrow f(x)$ diventa

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}\log(1-t) & \text{per } t \le 0 \\ t^{\alpha-1}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{t} & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

$$f'_-(0) = \lim_{t\to 0^-}\frac{f(t)-\overbrace{f(0)}^{=0}}{t-0} = \lim_{t\to 0^-}\frac{-\frac{\pi}{2}\log(1-t)}{t} = -\frac{\pi}{2}\cdot(-1) = +\frac{\pi}{2}$$

$$f'_+(0) = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0^+}\frac{t^{\alpha-1}\cdot\overbrace{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t}\right)}^{\to\pi/2}}{t} = \frac{\pi}{2}\cdot\lim_{t\to 0^+} t^{\alpha-2} =$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cdot 0 & \text{se } \alpha-2>0 \iff \alpha>2 & \Rightarrow x=1 \text{ è pto angoloso} \\ \frac{\pi}{2}\cdot 1 & \text{se } \alpha-2=0 \iff \alpha=2 & \Rightarrow \text{in } x=1\ f \text{ è derivabile} \\ \frac{\pi}{2}\cdot+\infty & \text{se } \alpha-2<0 \iff \alpha<2 & \Rightarrow x=1 \text{ è pto angoloso.} \end{cases}$$

Es 7 dell'appello e 4 del Test

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}\,dx$$ sostituzione $t=\sqrt{x}$

$dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

se $x=0 \Rightarrow t=0$

se $x=4 \Rightarrow t=2$

$\Downarrow$

$dt = \frac{1}{2t}\,dx \Rightarrow 2t\,dt = dx$

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^2 e^t \cdot 2t\,dt = 2\int_0^2 \underbrace{t}_{g}\cdot \underbrace{e^t}_{f'}\,dt$$, applico per parti $\int f'g = fg - \int fg'$

$$= 2\left[\left[t\cdot e^t\right]_0^2 - \int_0^2 e^t\,dt\right] =$$ $f=e^t,\ g'=1$

$$= 2\left[\left[t\cdot e^t\right]_0^2 - \left[e^t\right]_0^2\right] =$$

$$= 2\left(2e^2 - 0 - e^2 + 1\right) = 2\left(e^2+1\right)$$

Es 8 dell'appello e 5 del Test

$$\begin{cases} y''+y = xe^x \\ y(0) = -\frac{1}{2} \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

1. omogenea $\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$ $\quad Re\,\lambda_1 = 0,\ Im\,\lambda_1 = 1$

$$y_0(x, c_1, c_2) = c_1 \cos(Im\,\lambda_1 \cdot x) + c_2 \sin(Im\,\lambda_1 \cdot x) =$$
$$= c_1\cos x + c_2 \sin x$$

2. soluz particolare : $f(x) = xe^x = P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$

con $n=1,\ \alpha=1,\ \beta=0$

$\alpha + i\beta = 1+0i$ non è soluzione di $\lambda^2+1=0 \Rightarrow m=0$

(11)

$$y_p(x) = \underset{=0}{x^m} \cdot \underset{=1}{e^{\alpha x}} \left(\underbrace{q_1(x)}_{\in \mathbb{P}_1} \cos(\underset{0}{\beta} x) + \cancel{q_2(x) \sin(\beta x)} \right)$$

$q_1(x) \in \mathbb{P}_1$ è $q_1(x) = Ax+B$

$\Rightarrow y_p(x) = e^x \cdot (Ax+B)$

Trovo A e B imponendo che $y_p(x)$ soddisfi l'eqz diff

$y_p'(x) = e^x(Ax+B) + e^x \cdot A$

$y_p''(x) = e^x(Ax+B) + e^x \cdot A + e^x A$

$y_p'' + y_p = xe^x \iff \cancel{e^x}(Ax+B+2A) + \cancel{e^x}(Ax+B) = x\cancel{e^x}$

$$\begin{cases} A + A = 1 \\ 2A + 2B = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -1/2 \end{cases}$$

$y_p(x) = \frac{1}{2} e^x (x-1)$

- $y(x, c_1, c_2) = y_0(x, c_1, c_2) + y_p(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} e^x (x-1)$

- Calcolo c_1 e c_2

$y'(x, c_1, c_2) = -c_1 \sin x + c_2 \cos x + \frac{1}{2} e^x (x \cancel{-1} \cancel{+1})$

$y(0) = c_1 + c_2 \cdot 0 + \frac{1}{2} e^0 (0-1) = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow c_1 = 0$

$y'(0) = c_2 \cdot 1 = 1 \quad \Rightarrow c_2 = 1$

la soluzione è $y(x) = \sin x + \frac{1}{2} e^x (x-1)$.