Esercizi dell'appello del giorno 14/01/2019 (1)

1 - Sia $f(x) = \frac{x}{4} - 1 + \frac{x}{x^2-4}$

- $dom(f) = \mathbb{R} - \{-2, +2\} = (-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty)$

$f(-x) = -\frac{x}{4} - 1 + \frac{-x}{x^2-4} \neq f(x)$ $\Rightarrow f$ non
$\neq -f(x)$

- limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \Big[\underbrace{\frac{x}{4}}_{\to -\infty} - 1 + \underbrace{\frac{x}{x^2-4}}_{\to 0}\Big] = -\infty$$

per confronto di ordini di infinito

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \Big[\underbrace{\frac{x}{4}}_{\to +\infty} - 1 + \underbrace{\frac{x}{x^2-4}}_{\to 0}\Big] = +\infty$$

f non ammette asintoti orizzontali.

- Cerco eventuali asintoti obliqui

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \Big[\underbrace{\frac{\cancel{x}}{4\cancel{x}}}_{\to \frac{1}{4}} - \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\cancel{x}^{1}}{\cancel{x}(x^2-4)}}_{\to 0}\Big] = \frac{1}{4}$$

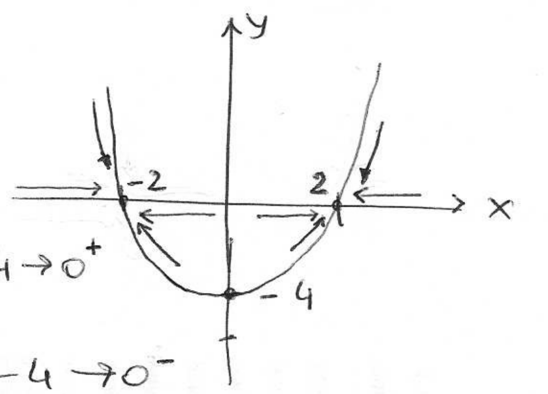
$$q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\pm\infty} \Big[\cancel{\frac{x}{4}} - 1 + \underbrace{\frac{x}{x^2-4}}_{\to 0} - \cancel{\frac{1}{4}x}\Big] = -1$$

$\Rightarrow y = \frac{1}{4}x - 1$ è asintoto obliquo completo

$$\lim_{x\to(-2)^-} f(x) = \lim_{x\to(-2)^-} \Big[\underbrace{\frac{x}{4}}_{\to -\frac{1}{2}} - 1 + \frac{\overset{\to -2}{x}}{\underbrace{x^2-4}_{\to 0}}\Big]$$

per capire se è 0^- o 0^+ $\longrightarrow$

disegno $y = x^2 - 4$



se $x \to (-2)^- \Rightarrow y = x^2 - 4 \to 0^+$

se $x \to (-2)^+ \Rightarrow y = x^2 - 4 \to 0^-$

se $x \to (2)^- \Rightarrow y = x^2 - 4 \to 0^-$

se $x \to (2)^+ \Rightarrow y = x^2 - 4 \to 0^+$

Segue che $\displaystyle \lim_{x \to (-2)^-} \Bigg[\underbrace{\frac{x}{4}}_{\to -\frac{1}{2}} - 1 + \frac{\overset{\to -2}{x}}{\underbrace{x^2 - 4}_{\to 0^+}} \Bigg] = -\frac{1}{2} - 1 - \infty = -\infty$

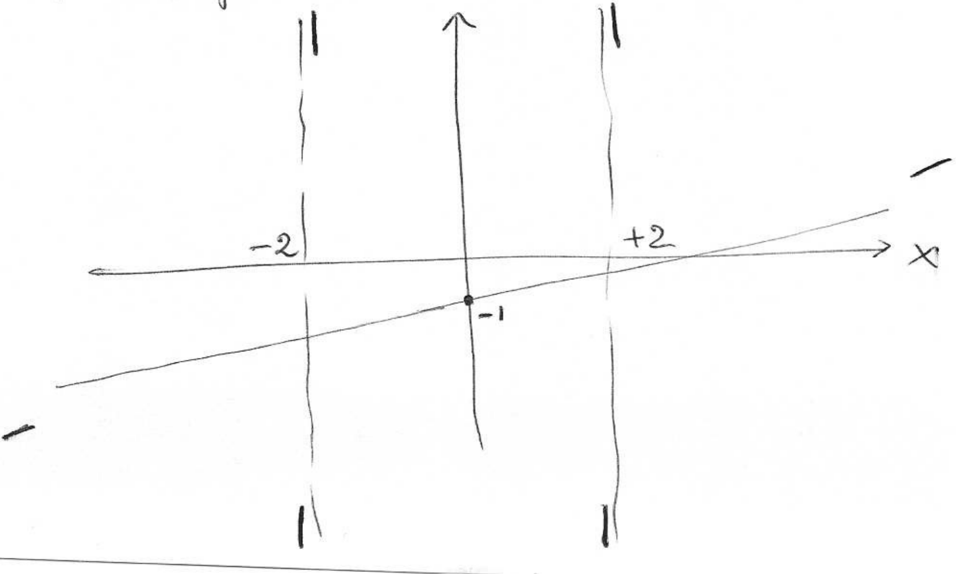
Analogamente

$$\lim_{x \to -2^+} \left(\frac{x}{4} - 1 + \frac{\overset{\to -2}{x}}{\underbrace{x^2 - 4}_{\to 0^-}} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \left(\frac{x}{4} - 1 + \frac{\overset{\to 2}{x}}{\underbrace{x^2 - 4}_{\to 0^-}} \right) = -\infty \qquad \lim_{x \to 2^+} \left(\frac{x}{4} - 1 + \frac{\overset{\to 2}{x}}{\underbrace{x^2 - 4}_{\to 0^+}} \right) = +\infty$$

le rette $x = -2$ e $x = +2$ sono asintoti verticali completi.

Disegno i comportamenti dei limiti:



Derivata: lasciare la somma, non fare il denominatore comune quando si deve calcolare la derivata: è più facile calcolare la derivata di una somma che la derivata di una frazione.

? $f'(x)$

$$f(x) = \frac{x}{4} - 1 + \frac{x}{x^2-4}$$

$$f'(x) = \frac{1}{4} + \frac{x^2-4-x\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{1}{4} - \frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}$$

dom f' = dom f $\Rightarrow$ $\nexists$ punti di non derivabilità.

- Cerco i punti stazionari.

Adesso è meglio procedere facendo denominatore comune, in modo da avere una sola frazione

$$f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{x^2+4}{(x^2-4)^2} = \frac{(x^2-4)^2 - 4x^2 - 16}{4(x^2-4)^2} = \frac{x^4 + \cancel{16} - 8x^2 - 4x^2 - \cancel{16}}{4(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^4 - 12x^2}{4(x^2-4)^2} = \frac{x^2(x^2-12)}{4(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff x^2 = 0 \quad \text{o} \quad x^2 - 12 = 0$$

$$x^2 = 0 \;\downarrow\; x = 0 \qquad x^2-12=0 \;\downarrow\; x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$$

punti stazionari: $x = 0$, $x = \pm 2\sqrt{3}$.

- Studio il segno di $f'(x)$

$$f'(x) \geq 0 \iff \frac{x^2(x^2-12)}{4(x^2-4)^2} \geq 0 \iff x^2 - 12 \geq 0$$ perché

$x^2 \geq 0 \; \forall x \in \text{dom}(f)$, $(x^2-4)^2 > 0 \; \forall x \in \text{dom}(f)$,

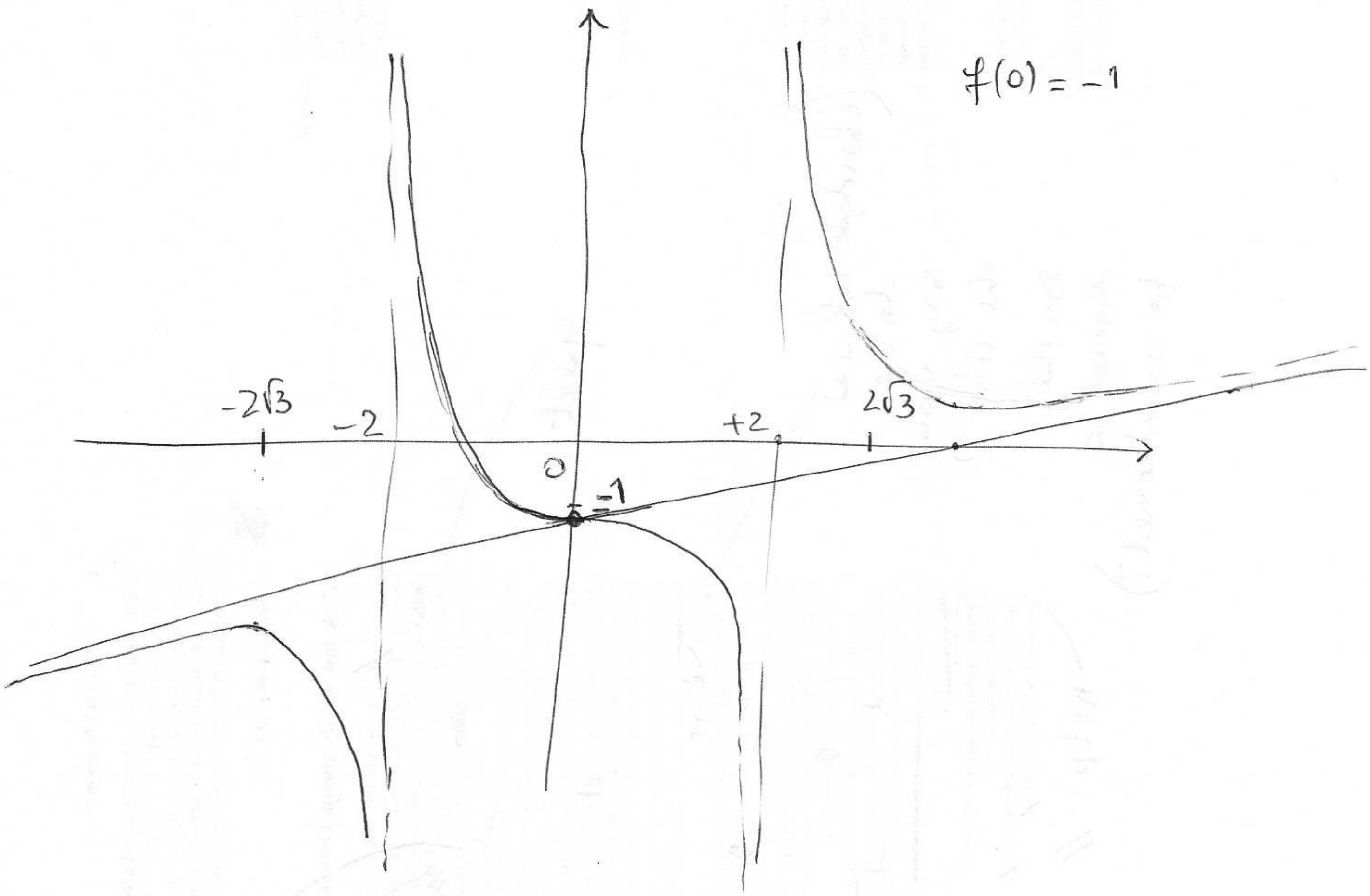
$x^2 - 12 \geq 0 \iff x \leq -2\sqrt{3} \cup x \geq 2\sqrt{3}$

		$-2\sqrt{3}$		-2		0		2		$2\sqrt{3}$	
f'	$+$	0	$-$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$
f	↗		↘		↘		↘		↘		↗

$x = -2\sqrt{3}$ è pto di max relativo

$x = +2\sqrt{3}$ è pto di min relativo

$x = 0$ è pto stazionario, nè di max, nè di minimo
allora è pto di flesso a tangente orizz.



∄ pti di max o min assoluti in quanto
f è illimitata

2 - Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$:

posto $w = 3 + \dfrac{(\mathrm{Im}(z))^2}{e^{3/2\pi i}} - \dfrac{1+3i}{2+i} z\bar{z} + i\left(\mathrm{Re}(zi)\right)^2$, si abbia $w \in \mathbb{R}$ e $\mathrm{Re}(w) \geq 0$.

Anzitutto osservo che $\dfrac{1}{e^{3/2\pi i}} = e^{-3/2\pi i} = e^{\frac{\pi}{2}i} = i$

e $\dfrac{1+3i}{2+i} = \dfrac{1+3i}{2+i} \cdot \dfrac{2-i}{2-i} = \dfrac{2+6i-i+3}{4+1} = \dfrac{5+5i}{5} = 1+i$

quindi pongo $z = x+iy$, allora $\mathrm{Im}\,z = y$ ~~Re(zi)=~~

$\mathrm{Re}(zi) = \mathrm{Re}(xi - y) = -y$, e $z\bar{z} = |z|^2 = x^2+y^2$

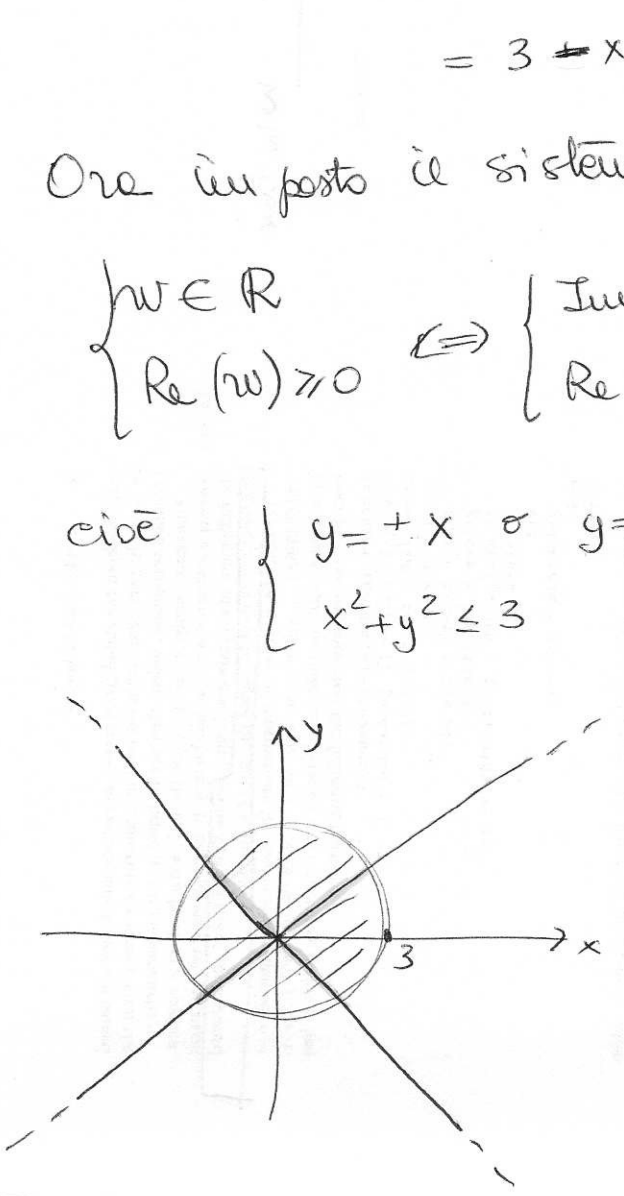
Segue che $w = 3 + y^2 i - (1+i)(x^2+y^2) + iy^2 =$

$= 3 - x^2 - y^2 + i(y^2 - x^2)$ -

Ora imposto il sistema (ricordo che "e" equivale al sistema, (contemporaneità))

$$\begin{cases} w \in \mathbb{R} \\ \mathrm{Re}(w) \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{Im}(w) = 0 \\ \mathrm{Re}(w) \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 - x^2 = 0 \\ 3 - x^2 - y^2 \geq 0 \end{cases}$$

cioè $\begin{cases} y = +x \quad o \quad y = -x & \text{(bisettrici)} \\ x^2+y^2 \leq 3 & \text{cerchio} \end{cases}$ -



La soluzione è l'intersezione tra il cerchio e l'unione delle due bisettrici.

3 - $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\left[(n+7)^n + \sin(2^n)\right](n^{1/n}-1)(n!+1)}{(1+n)^n (n-1)! \log(n+1)} = (*)$

$(n+7)^n + \sin(2^n) \sim (n+7)^n$ per $n\to\infty$

$\log(n+1) \sim \log n$ per $n\to\infty$

$n!+1 \sim n! = n(n-1)!$

$n^{1/n} - 1 = e^{\frac{1}{n}\log n} - 1 \sim \frac{1}{n}\log n$ per $n\to\infty$
$\left(\frac{1}{n}\log n = x \to 0 \Rightarrow e^x - 1 \sim x\right)$

$$(*) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+7)^n \cdot \cancel{\frac{\log n}{n}} \cdot \cancel{n}\,\cancel{(n-1)!}}{(1+n)^n \cdot \cancel{(n-1)!}\,\cancel{\log n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+7)^n}{(1+n)^n} \cdot \frac{n^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+7}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{\left(\frac{1+n}{n}\right)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{7}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = e^7 \cdot \frac{1}{e} = e^6.$$

Es 4 dell'appello e Es 1 del test

$$\sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\frac{3n^{5/2}(2^n+\log n)}{7^n+e^{-n}}}_{a_n}$$

– a_n è a termini positivi

posso applicare il criterio del conf. asintotico

$$a_n \sim \frac{3n^{5/2}\cdot 2^n}{7^n} = b_n$$

infatti: $2^n+\log n \sim 2^n$
$7^n+e^{-n} \sim 7^n$
per $n\to\infty$

– Ora studio $\sum b_n$ con il criterio del rapporto:

$$l = \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)^{5/2}\cdot 2^{n+1}}{7^{n+1}}\cdot\frac{7^n}{3n^{5/2}\cdot 2^n} = \frac{2}{7}<1$$

$\Rightarrow$ la serie $\sum b_n$ conv

e, per confronto as., converge anche $\sum a_n$.

– Avrei potuto anche applicare il criterio della radice (al posto del criterio del rapporto), avrei trovato:

$$l = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3n^{5/2}\cdot\frac{2^n}{7^n}} = \frac{2}{7}\lim_{n\to\infty}3^{1/n}\cdot n^{\frac{5}{2n}} = (*)$$

$$\lim_{n\to\infty} 3^{\overset{\to 0}{1/n}} = 3^0 = 1 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} n^{\frac{5}{2n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\overset{\to 0}{\frac{5}{2n}\log n}} = e^0 = 1$$

$(*) = \frac{2}{7} < 1$ (esattamente come prima).

[Attenzione che per le file 4, 5, 6 si otteneva serie divergente, perché risultava $l>1$].

Es 5 dell'appello e 2 del test

Calcolare $P_2(x)$ che approssima $f(x) = \log(x+3)$ in un intorno di $x_0 = 0$ e

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\log(x+3) - x - 3\log 3}{e^{x^2}(\cosh x - 1)} .$$

$$P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad \text{poiché } x_0 = 0$$

Calcolo $f'(x) = \dfrac{1}{x+3}$, $f''(x) = -\dfrac{1}{(x+3)^2}$, allora

$$f(0) = \log 3, \quad f'(0) = \frac{1}{3}, \quad f''(0) = -\frac{1}{9}$$

$$P_2(x) = \log 3 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2\cdot 9}x^2$$

e $f(x) = P_2(x) + o(x^2)$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\log(x+3) - x - 3\log 3}{\underset{\downarrow\atop 1}{e^{x^2}}(\cosh x - 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{3\log 3 + x - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2) - x - 3\log 3}{1\cdot\left(\cancel{1} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \cancel{1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^2}{\frac{x^2}{2}} = -\frac{1}{3}$$

Es 6 dell'appello e 3 del Test.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}\log(2-x) & \text{se } x \le 1 \\ (x-1)^{\alpha-1}\cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{x-1} & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad \text{con } \alpha > 1.$$

Verificare che f è continua in $x=1$:

$$f(1) = -\frac{\pi}{2}\log(2-1) = 0$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\Big[-\frac{\pi}{2}\log\underbrace{\underbrace{(2-x)}_{\to 1}}_{\to 0}\Big] = 0$$

è sempre > 0 perché $\alpha > 1$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}\underbrace{(x-1)}_{\to 0}^{\alpha-1}\underbrace{\operatorname{arctg}\underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\to+\infty}}_{\to +\frac{\pi}{2}} = 0$$

$\Rightarrow f$ è continua in $x=1$.

Per studiare la derivabilità in $x=1$, prima faccio la sostituzione $t = x-1 \Rightarrow f(x)$ diventa

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}\log(1-t) & \text{per } t \le 0 \\ t^{\alpha-1}\cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{t} & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

$$f'_-(0) = \lim_{t\to 0^-}\frac{f(t) - \overbrace{f(0)}^{=0}}{t-0} = \lim_{t\to 0^-}\frac{-\frac{\pi}{2}\log(1-t)}{t} = -\frac{\pi}{2}\cdot(-1) = +\frac{\pi}{2}$$

$$f'_+(0) = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0^+}\frac{t^{\alpha-1}\cdot\overbrace{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t}\right)}^{\to\pi/2}}{t} = \frac{\pi}{2}\cdot\lim_{t\to 0^+} t^{\alpha-2} =$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cdot 0 & \text{se } \alpha-2>0 \iff \alpha>2 & \Rightarrow x=1 \text{ è p.to angoloso} \\ \frac{\pi}{2}\cdot 1 & \text{se } \alpha-2=0 \iff \alpha=2 & \Rightarrow \text{in } x=1\ f \text{ è derivabile} \\ \frac{\pi}{2}\cdot+\infty & \text{se } \alpha-2<0 \iff \alpha<2 & \Rightarrow x=1 \text{ è p.to angoloso.} \end{cases}$$

Es 7 dell'appello e 4 del Test

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}\,dx$$

sostituzione $t=\sqrt{x}$

$dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$\Downarrow$

$dt = \frac{1}{2t}\,dx \Rightarrow 2t\,dt = dx$

se $x=0 \Rightarrow t=0$

se $x=4 \Rightarrow t=2$

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx = \int_0^2 e^t \cdot 2t\,dt = 2\int_0^2 \underbrace{t}_{g}\cdot \underbrace{e^t}_{f'}\,dt$$

, applico per parti $\int f'g = fg - \int fg'$

$f=e^t$, $g'=1$

$$=2\left[\left[t\cdot e^t\right]_0^2 - \int_0^2 e^t\,dt\right] =$$

$$=2\left[\left[t\cdot e^t\right]_0^2 - \left[e^t\right]_0^2\right] =$$

$$=2\left(2e^2-0-e^2+1\right) = 2\left(e^2+1\right)$$

Es 8 dell'appello e 5 del Test

$$\begin{cases} y''+y = xe^x \\ y(0) = -\frac{1}{2} \\ y'(0)=1 \end{cases}$$

1. omogenea $\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm i$ $\quad Re\,\lambda_1=0,\ Im\,\lambda_1=1$

$$y_0(x,c_1,c_2) = c_1\cos(Im\,\lambda_1\cdot x) + c_2\sin(Im\,\lambda_1\cdot x) =$$
$$= c_1\cos x + c_2 \sin x$$

2. soluz particolare : $f(x) = xe^x = P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$

con $n=1$, $\alpha=1$, $\beta=0$

$\alpha+i\beta = 1+0i$ non è soluzione di $\lambda^2+1=0 \Rightarrow m=0$

$$y_p(x) = \underset{=0}{x^m} \cdot \underset{=1}{e^{\alpha x}} \Big(\underbrace{q_1(x)}_{\in \mathbb{P}_1} \cos(\underset{0}{\beta} x) + \cancel{q_2(x) \sin(\underset{0}{\beta} x)} \Big)$$

$q_1(x) \in \mathbb{P}_1$ è $q_1(x) = Ax+B$

$$\Rightarrow y_p(x) = e^x \cdot (Ax+B)$$

Trovo A e B imponendo che $y_p(x)$ soddisfi l'eqz diff

$$y_p'(x) = e^x(Ax+B) + e^x \cdot A$$

$$y_p''(x) = e^x(Ax+B) + e^x \cdot A + e^x A$$

$$y_p'' + y_p = x e^x \iff \cancel{e^x}(Ax+B+2A) + \cancel{e^x}(Ax+B) = x \cancel{e^x}$$

$$\begin{cases} A + A = 1 \\ 2A + 2B = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -1/2 \end{cases}$$

$$y_p(x) = \frac{1}{2} e^x (x-1)$$

- $y(x, c_1, c_2) = y_0(x, c_1, c_2) + y_p(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} e^x (x-1)$

- Calcolo c_1 e c_2

$$y'(x, c_1, c_2) = -c_1 \sin x + c_2 \cos x + \frac{1}{2} e^x (x \cancel{-1} \cancel{+1})$$

$$y(0) = c_1 + c_2 \cdot 0 + \frac{1}{2} e^0 (0-1) = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow c_1 = 0$$

$$y'(0) = c_2 \cdot 1 = 1 \quad \Rightarrow c_2 = 1$$

la soluzione è $y(x) = \sin x + \frac{1}{2} e^x (x-1)$.