Svolgimento esercizi appello 4 febbraio 2019

1 - $f(x) = x \cdot \exp\left(\dfrac{1}{49 \log x}\right)$

$\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ e } \log x \neq 0\} = (0,1) \cup (1,+\infty)$

f non è definita per $x<0$ quindi non può essere pari né dispari.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{x}_{\downarrow\, 0^+} \cdot \exp\Bigg(\underbrace{\frac{1}{49 \underbrace{\log x}_{\downarrow\, -\infty}}}_{\to 0} \Bigg) = 0 \cdot e^0 = 0$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \underbrace{x}_{\downarrow\, 1} \exp\Bigg(\underbrace{\frac{1}{49 \underbrace{\log x}_{\downarrow\, 0^-}}}_{\to -\infty} \Bigg) = 1 \cdot 0 = 0$$

ricordo che $e^x \to 0$ per $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x \cdot \underbrace{\exp\Bigg(\frac{1}{\underbrace{49 \log x}_{\to 0^+}} \Bigg)}_{\to +\infty} = 1(+\infty) = +\infty$$

($e^x \to +\infty$ per $x \to +\infty$)

$x = 1$ è as. vert. destro

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x \cdot \underbrace{\exp\Bigg(\overbrace{\frac{1}{\underbrace{49 \log x}_{\to +\infty}}}^{\to 0} \Bigg)}_{} = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

$\nexists$ as. orizzontale

potrebbe $\exists$ as. obliquo

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{x} \cdot e^{1/(49 \log x)}}{\cancel{x}} = 1$$

$$q = \lim_{x\to +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to +\infty} \left(x \cdot e^{\frac{1}{49 \log x}} - x\right) = \lim_{x\to +\infty} x \left(e^{\frac{1}{49 \log x}} - 1\right)$$

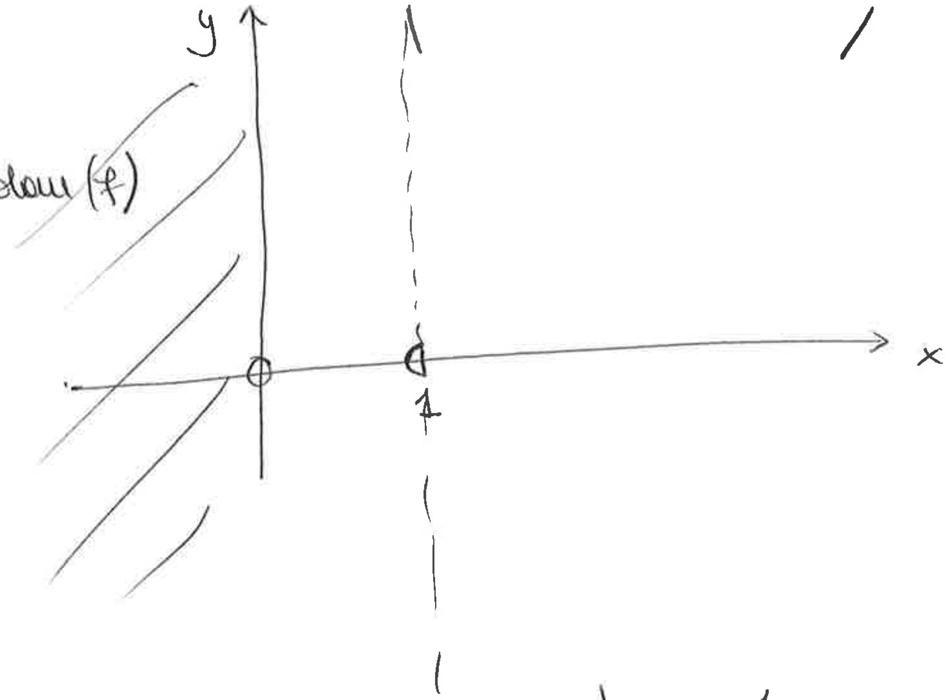
$$= \lim_{x\to +\infty} x \cdot \frac{1}{49 \log x} = +\infty$$ perché $x \to +\infty$ più velocemente di $\log x$.

$\uparrow$ perché $e^t - 1 \sim t$ per $t \to 0$ e $t = \dfrac{1}{49 \log x}$

$\nexists$ as. obliqui perché $q = \infty$

osservo che

$f(x) > 0 \quad \forall x \in dom(f)$



$$f'(x) = \exp\left(\frac{1}{49\log x}\right) + \cancel{x} \cdot \exp\left(\frac{1}{49\log x}\right) \cdot \frac{-1}{(49\log x)^2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}$$

$$= \exp\left(\frac{1}{49\log x}\right)\left[1 - \frac{49}{(49\log x)^2}\right]$$

$dom(f) = dom(f') \Rightarrow \nexists$ pti di non derivabilità.

$$f'(x) = 0 \iff \frac{49(\log x)^2 - 1}{49(\log x)^2} = 0$$ (exp non si annulla mai)

$$\iff 49(\log x)^2 = 1 \iff 7\log x = \pm 1$$

$$\iff \log x = \pm\frac{1}{7} \iff x_1 = e^{-\frac{1}{7}} \text{ o } x_2 = e^{\frac{1}{7}}$$

(2 punti stazionari)

$f'(x) \geq 0 \qquad \exp\left(\frac{1}{49\log x}\right) > 0 \quad \forall x \in dom(f)$

$$\left(1 - \frac{1}{49(\log x)^2}\right) \geq 0 \iff \frac{49(\log x)^2 - 1}{49(\log x)^2} \geq 0$$

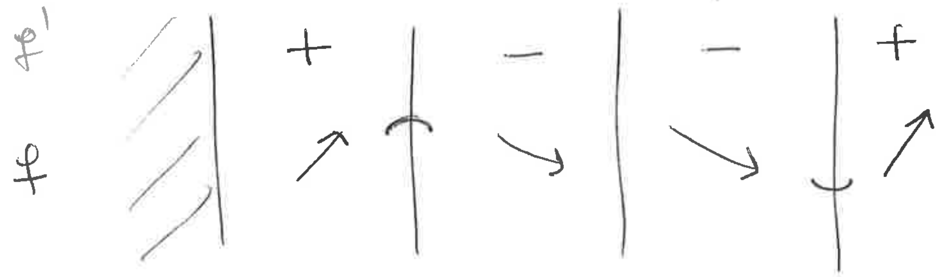
$$N \geq 0 \iff \underbrace{(7\log x)}_{t}^2 - 1 \geq 0 \iff t^2 - 1 \geq 0 \iff t \leq -1 \cup t \geq 1$$

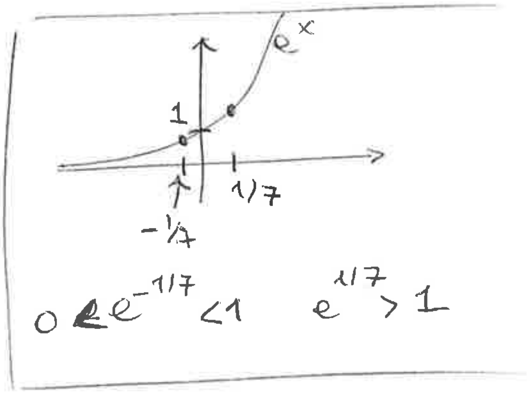
$$7\log x \leq -1 \quad \cup \quad 7\log x \geq 1$$

$$x \leq e^{-1/7} \quad \cup \quad x \geq e^{1/7}$$

$D > 0$ $\quad (7\log x)^2 > 0$ vero $\forall x \in \mathrm{dom}(f)$ perché è un quadrato di quantità non nulle

Quindi $f'(x) \geq 0$ per $x \leq e^{-1/7} \cup x \geq e^{1/7}$





$x = e^{-1/7}$ è pto di max relativo

$x = e^{1/7}$ è pto di min relativo.

f è cresc in $(0, e^{-1/7}) \cup (e^{1/7}, +\infty)$

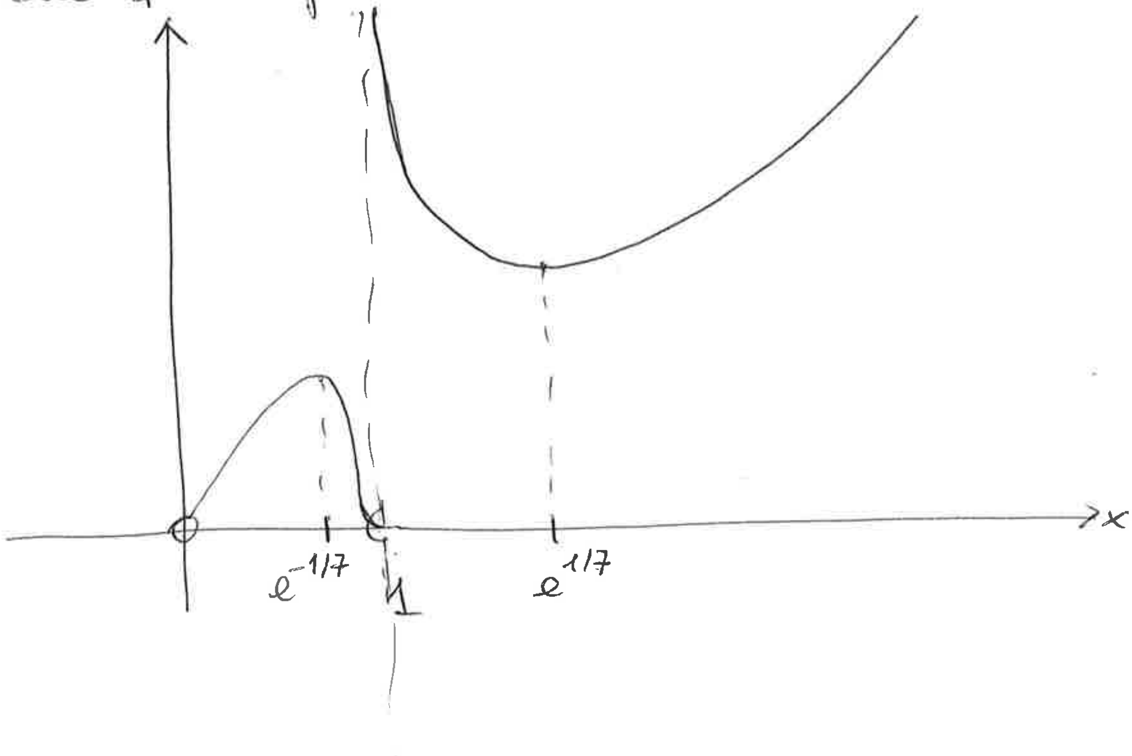
f è decr in $(e^{-1/7}, 1) \cup (1, e^{1/7})$

$\nexists$ pti di max assoluto perché f è illimitata superiormente

$\nexists$ pti di min assoluto perché $f(e^{1/7}) = e^{1/7} \cdot \exp\left(\frac{1}{7\,\underbrace{\log(e^{1/7})}_{\frac{1}{7}}}\right)$

$= e^{1/7} \cdot e > 1$

quindi, in base a crescenza e decrescenza deduco che f non può mai arrivare a 0.



Per l'analisi dei flessi: a destra di $x=1$ non ci sono elementi per stabilire se vi siano cambi di concavità, poiché f è convessa in un intorno di $e^{1/7}$, l'asintoto verticale implica f convessa in $I_+(1)$ e il comportamento prevalente dell'esponenziale per $x \to +\infty$ implica ancora una volta f convessa.

A sinistra di $x=1$: sappiamo che f è concava in un intorno di $e^{-1/7}$. Studiamo $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$ e $\lim_{x\to 1^-} f'(x)$.

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\exp\left(\frac{1}{49\log x}\right)}_{\downarrow\, 1}\left(1-\underbrace{\boxed{\frac{49}{(49\log x)^2}}}_{\to 0}\right) = 1$$

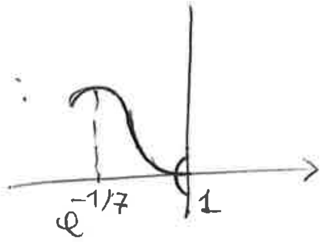
Non ho elementi in $I_+(0)$ per dire quale sia la concavità di f e quindi per dire se $\exists$ flessi.

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \underbrace{\exp\left(\frac{1}{49\log x}\right)}_{\downarrow\, 0}\underbrace{\left(1-\frac{49}{(49\log x)^2}\right)}_{\downarrow\, -\infty} = 0$$

$\uparrow$ perché il comportamento di exp prevale

In un intorno sx di 1 f è decrescente e

$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 0 \Rightarrow$ la funzione è convessa:



Quindi $\exists$ un pto di flesso in $(e^{-1/7}, 1)$

2) $$\left|e^{z^2+\log 3}\right| = \left[2+\underbrace{e^{2\pi i}}_{1} - \frac{\operatorname{Im}(z)}{i}\right]^2$$

$$z = x+iy$$

$$\left|e^{x^2-y^2+2xyi}\cdot\underbrace{e^{\log 3}}_{3}\right| = \left[3 - \frac{y\cdot i}{i\cdot i}\right]^2 \qquad i^2=-1$$

$$3\left|e^{x^2-y^2+2xyi}\right| = (3+iy)^2$$

Ricordo che $|e^w| = e^{\operatorname{Re} w}$

$$\underbrace{3e^{x^2-y^2}}_{\in\mathbb{R}} = \underbrace{9-y^2+6yi}_{\in\mathbb{C}}$$

posso riscrivere il termine di sx come numero complesso

$$3e^{x^2-y^2}+0\cdot i = 9-y^2+6yi$$

2 numeri complessi sono = se hanno = parte reale e = parte immaginaria

$$\begin{cases} 3e^{x^2-y^2} = 9-y^2 \\ 0 = 6y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3e^{x^2} = 9 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x^2} = 3 \\ y=0 \end{cases} \begin{cases} x^2 = \log 3 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1,2} = \pm\sqrt{\log 3} \\ y_{1,2} = 0 \end{cases}$$

soluz: $P_1 = (-\sqrt{\log 3}, 0)$
$P_2 = (+\sqrt{\log 3}, 0)$

---

3) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{(n!)^2-13n} - n!\right)(n+1)!}{(n+1)^3\log\left(\frac{n+3}{n+2}\right)+(n+3)^{1/n}} \quad (*)$$

razionalizzo $\left(\sqrt{(n!)^2-13n} - n!\right)$ perché ho f.i. $+\infty-\infty$

$$\left(\sqrt{(n!)^2-13n} - n!\right) = \left(\sqrt{(n!)^2-13n} - n!\right)\frac{\left(\sqrt{(n!)^2-13n} + n!\right)}{\left(\sqrt{(n!)^2-13n} + n!\right)} = \frac{\cancel{(n!)^2} - 13n - \cancel{(n!)^2}}{\sqrt{(n!)^2-13n} + n!} \sim$$

$$\sim \frac{-13n}{2\,n!}$$

Poi:

$$\log\left(\frac{n+3}{n+2}\right) = \log\left(\frac{n+2 \;+1}{n+2}\right) = \log\left(1+\frac{1}{n+2}\right) \sim \frac{1}{n+2} \text{ per } n\to\infty$$

$(n+3)^{1/n}$ è forma ind ∞^0 (applico $a_n^{b_n} = e^{b_n \log a_n}$)

$$(n+3)^{1/n} = e^{\underbrace{\frac{1}{n}\log(n+3)}_{\downarrow \text{ per } n\to\infty \; 0}} \longrightarrow 1$$

$$(*) = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{13n}{2\cancel{n!}}\overbrace{(n+1)}^{\sim n}\cancel{n!}}{\underbrace{(n+1)^3}_{\sim n}\cdot\frac{1}{\underbrace{n+2}_{\sim n}}+1} = \lim_{n\to\infty} -\frac{13}{2}\frac{n^2}{n^{\cancel{3}\,2}\cdot\frac{1}{\cancel{n}}+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} -\frac{13}{2}\underbrace{\frac{n^2}{n^2+1}}_{\to 1} = -\frac{13}{2}$$

---

4) $$\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{e^{2x}}\right)}{\log\left(\cosh(3x)\right)} = \lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\frac{e^{2x}-2x-1}{e^{2x}(2x+1)}\right)}{\log\left(1+\frac{(3x)^2}{2}+o(x^2)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\frac{\cancel{1}+\cancel{2x}+(2x)^2/2+o(x^2)-\cancel{2x}-\cancel{1}}{e^{2x}(2x+1)}\right)}{\frac{(3x)^2}{2}+o(x^2)} =$$

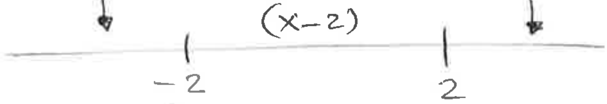
per $x\to0$ $$y = \frac{\frac{(2x)^2}{2}+o(x^2)}{\underbrace{e^{2x}(2x+1)}_{\to 1}} \to 0$$

allora $\sin(y)\sim y$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\frac{(2x)^2/2+o(x^2)}{e^{2x}(2x+1)}}{\frac{(3x)^2}{2}+o(x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\frac{(2x)^2}{2}+o(x^2)}{\underbrace{e^{2x}(2x+1)}_{\to 1}\cdot\left[\frac{(3x)^2}{2}+o(x^2)\right]} = \frac{4}{9}$$

5) $$f(x) = \begin{cases} (x-2)^2\log(x^2-4) - (x-2), & \text{se } |x| > 2 \\ x-2 & \text{se } |x| \le 2 \end{cases}$$ (7)



Studio cont in $x=-2$

$f(-2)=0$ $\quad \lim\limits_{x\to -2^-}\Big(\underbrace{(x-2)^2}_{\downarrow\, 16}\underbrace{\log(x^2-4)}_{\downarrow\, -\infty}-\underbrace{(x-2)}_{\downarrow\, -4}\Big) = -\infty$

$x=-2$ è pto di ∞

$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 0$

Studio cont in $x=2$

$f(2)=0$ $\quad \lim\limits_{x\to 2^-}(x-2)=0$ $\quad \lim\limits_{x\to 2^+}\Big(\underbrace{\underbrace{(x-2)^2}_{\downarrow\, 0}\underbrace{\log(x^2-4)}_{\downarrow\, -\infty}}_{\downarrow\, 0}-\underbrace{(x-2)}_{\downarrow\, 0}\Big) = 0$

perché applico il $\lim\limits_{t\to 0^+} t^\alpha(\log t)^\beta$ con $t=x-2$

$\Rightarrow f$ è cont in $x=2$.

Studio la deriv solo in $x=2$, dove f non è cont non ha senso studiare la derivabilità.

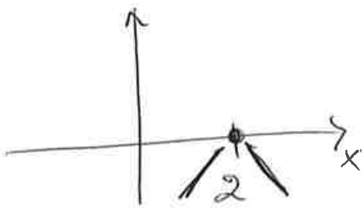
Calcolo $f'_\pm(2)$ con limite del rapporto incrementale

$$f'_-(2) = \lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)-0}{x-2} = 1 > 0$$

$$f'_+(2) = \lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)^2\log(x^2-4)-(x-2)}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2^+}\Big[\underbrace{\underbrace{(x-2)}_{\downarrow\, 0}\underbrace{\log(x^2-4)}_{\downarrow\, -\infty}}_{\downarrow\, 0} - 1\Big] = -1 < 0$$

stesso limite fondam. di prima



A sx di $x=2$ f è cresc perché $f'_-(2)>0$, a dx di $x=2$ f è decresc $\Rightarrow$ $x=2$ è pto di max

6) $$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos + \sin(2x)}{4+\sin^2 x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,(1+2\sin x)}{4+\sin^2 x}\,dx =$$

$(\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x)$

$y = \sin x$

$dy = \cos x\,dx$

se $x=0$, $y=0$

se $x=\frac{\pi}{2}$, $y=1$

$$= \int_0^1 \frac{1+2y}{4+y^2}\,dy = \int_0^1 \frac{1}{4+y^2}\,dy + \int_0^1 \frac{2y}{4+y^2}\,dy$$

- $$\int_0^1 \frac{1}{4+y^2}\,dy = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{1+\left(\frac{y}{2}\right)^2}\,dy = \frac{1}{\cancel{4}_2}\int_0^{1/2} \frac{\cancel{2}\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}(t)\right]_0^{1/2} =$$

$t=\frac{y}{2}$, $dt = \frac{1}{2}dy$ se $y=0$, $t=0$

se $y=1$, $t=\frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$$

- $$\int_0^1 \frac{2y}{4+y^2}\,dy = \left[\log(4+y^2)\right]_0^1 = \log 5 - \log 4 = \log\frac{5}{4}$$

l'integrale è $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) + \log\frac{5}{4}$.

---

7) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ $$\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{x^\alpha}{(1+x^3)\operatorname{arctg}(7x^2)}}_{f(x)}\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$$

per $x \to 0$

$1+x^3 \to 1$, $\operatorname{arctg}(7x^2) \sim 7x^2 \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx \sim \int_0^1 \frac{x^\alpha}{7x^2}\,dx =$

$= \frac{1}{7}\int_0^1 \frac{1}{x^{2-\alpha}}\,dx$ che converge se $2-\alpha<1 \iff \boxed{\alpha>1}$

per $x \to +\infty$

$1+x^3 \sim x^3$, $\operatorname{arctg}(7x^2) \to +\frac{\pi}{2} \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \sim \int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{\frac{\pi}{2}x^3}\,dx =$

$= \frac{2}{\pi}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3-\alpha}}\,dx$ che conv se $3-\alpha>1 \iff \boxed{\alpha<2}$.

L'integrale dato conv se $1<\alpha<2$

Sia $y:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ la soluz di

$$\begin{cases} y'+(\operatorname{tg}x)y=\cos x \\ y(0)=1 \end{cases}$$

$a(x)=\operatorname{tg}x \quad b(x)=\cos x$

$x_0=0 \quad y_0=1$

la formula risolutiva è $y(x)=\frac{1}{e^{A(x)}}\left[y_0+\int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt\right]$

con $A(x)=\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt$.

Calcolo $A(x)=\int_0^x \operatorname{tg}t\,dt=\int_0^x \frac{\sin t}{\cos t}dt=-\int_1^{\cos x}\frac{1}{z}dz=$

$z=\cos t$

$dz=-\sin t\,dt$

se $t=0 \quad z=1$

se $t=x \quad z=\cos x$

$=\left[-\log|z|\right]_1^{\cos x}=-\log|\cos x|+\underbrace{\log 1}_{0}=$

$=\log\frac{1}{|\cos x|}=\log\frac{1}{\cos x}$

(posso togliere il modulo perché $\cos x>0$ in un intorno di $x_0=0$).

$e^{A(x)}=e^{\log\frac{1}{\cos x}}=\frac{1}{\cos x}$

$\int_0^x b(t)e^{A(t)}dt=\int_0^x \cos t\cdot\frac{1}{\cos t}dt=\int_0^x 1\,dt=x$

Allora $y(x)=\frac{1}{1/\cos x}\left(1+x\right)=\cos x\,(x+1)$.