Svolgimento Appello di Analisi Matematica 1 del 16 Gennaio 2017

a cura di Michele Scaglia

1) Sia data la seguente funzione f reale di variabile reale definita da:

$$f(x) = 2 - \sqrt{1+x^2} - \sqrt{2}\arctan\frac{1}{x}.$$

Determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie.

Il dominio della radice quadrata, $[0,+\infty[$, impone che si abbia

$$1 + x^2 \geq 0.$$

La funzione arctan ha dominio tutto $\mathbb{R}$: tuttavia, il suo argomento è frazionario, quindi deve essere

$$x \neq 0.$$

Non ci sono altre condizioni di esistenza da porre. Il dominio di f è quindi dato dalle soluzioni reali del sistema

$$\begin{cases} 1 + x^2 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

Poiché la disequazione

$$1 + x^2 \geq 0$$

è soddisfatta per ogni valore reale di x (il membro di sinistra, infatti, è la somma di due quadrati, quindi sempre positivo), ne segue che la soluzione all'intero sistema è

$$x \neq 0,$$

da cui

$$\text{dom} f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[.$$

La simmetria del dominio non esclude che f possa essere pari o dispari.
Controlliamo, in base alle definizioni, se f presenti simmetrie.

Si ha, ricordando che arctan è dispari, cioè $\arctan(-t) = -\arctan t$,

$$f(-x) = 2 - \sqrt{1+(-x)^2} - \sqrt{2}\arctan\frac{1}{(-x)} = 2 - \sqrt{1+x^2} + \sqrt{2}\arctan\frac{1}{x} \neq f(x),$$

il che significa che f non è pari.
Proviamo se f sia dispari. Si ha

$$-f(-x) = -\left(2 - \sqrt{1+x^2} + \sqrt{2}\arctan\frac{1}{x}\right) = -2 + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{2}\arctan\frac{1}{x} \neq f(x),$$

quindi f non è nemmeno dispari.
Il grafico di f non presenta pertanto simmetrie né rispetto all'asse y, né rispetto all'origine degli assi.

Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per f.

Dal dominio di f

$$\text{dom} f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[,$$

deduciamo che dovremo valutare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to0^-} f(x), \qquad \lim_{x\to0^+} f(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Cominciamo dal

$$\lim_{x\to0^-}\left(2 - \sqrt{1+x^2} - \sqrt{2}\arctan\frac{1}{x}\right).$$

Poiché

$$\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x} = -\infty,$$

si ha, posto $y = \dfrac{1}{x}$,

$$\lim_{x\to0^-}\arctan\frac{1}{x} = \lim_{y\to-\infty}\arctan y = -\frac{\pi}{2}.$$

Per quanto riguarda la radice quadrata si ha, grazie alla continuità e ai teoremi sui limiti,

$$\lim_{x\to0^-}\sqrt{1+x^2} = 1.$$

Gli altri termini sono costanti.

Per l'algebra dei limiti segue che

$$\lim_{x\to 0^-}\left(2-\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}\arctan\frac{1}{x}\right)=\left[2-1-\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=1+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

Analogamente, considerando il

$$\lim_{x\to 0^+} f(x),$$

osservato che $\dfrac{1}{x}\to+\infty$ per $x\to 0^+$ da cui

$$\lim_{x\to 0^+}\arctan\frac{1}{x}=\lim_{y\to+\infty}\arctan y=\frac{\pi}{2},$$

troviamo

$$\lim_{x\to 0^+}\left[2-\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}\arctan\frac{1}{x}\right]=\left(2-1-\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

Poiché limite destro e sinitro in 0 sono entrambi finiti, concludiamo che $x=0$ NON è un asintoto verticale per il grafico di f.
Poiché dal dominio non risulta escluso alcun altro punto (oltre a $x_0=0$), possiamo affermare che il grafico di f non possiede asintoti verticali.

Calcoliamo ora i limiti per $x\to-\infty$ e per $x\to+\infty$.
Cominciamo con

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[2-\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}\arctan\frac{1}{x}\right].$$

Poiché $x\to-\infty$, si ha che $\dfrac{1}{x}\to 0^-$, da cui

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan\frac{1}{x}=\lim_{y\to 0^-}\arctan y=0.$$

Invece

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+x^2}=+\infty.$$

Grazie all'algebra dei limiti troviamo che

$$\lim_{x\to-\infty}\left[2-\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}\arctan\frac{1}{x}\right]=[2-\infty+0]=-\infty.$$

La funzione f è quindi ***illimitata inferiormente***.
Non solo, potrebbe ammettere un asintoto obliquo per $x\to-\infty$, vale a dire una retta del tipo

$y = mx + q$ alla quale si avvicini sempre più il grafico della funzione.
Calcoliamo i parametri dell'eventuale asintoto.
Si ha

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2 - \sqrt{1+x^2} - \sqrt{2}\arctan\frac{1}{x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2}{x} - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{\sqrt{2}\arctan\frac{1}{x}}{x} \right).$$

Vorremo applicare l'agebra dei limiti. Calcoliamo quindi il limite di ciascun addendo.
Si ha banalmente

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = 0$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2}\arctan\frac{1}{x}}{x} = 0,$$

poiché $\arctan\frac{1}{x} \to 0$ quando $x \to -\infty$ (ricordiamo che $\left[\frac{0}{\infty}\right]$ non è una forma indeterminata).
Il

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x},$$

invece, si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.
Approssimiamo il radicando con l'infinito di ordine superiore x^2 (l'altro termine è addirittura costante). Osservato che $x \to -\infty$ implica $x < 0$, da cui $|x| = -x$, troviamo

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \sim \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1,$$

cioè

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \sim -1 \quad \text{per } x \to -\infty.$$

Ne segue che

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = (0 - (-1) - 0) = +1.$$

Procediamo col calcolo della q.
Si ha
$$q = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - m \cdot x] = \lim_{x\to-\infty} \left[2 - \sqrt{1+x^2} - \sqrt{2}\arctan\frac{1}{x} - (x)\right] =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left[2 - \sqrt{1+x^2} - \sqrt{2}\arctan\frac{1}{x} - x\right] = \lim_{x\to-\infty} \left[2 - \sqrt{2}\arctan\frac{1}{x} + \left(-x - \sqrt{1+x^2}\right)\right].$$

I primi due addendi tendono, rispettivamente, a 2 e a 0.

Occupiamoci ora del limite del terzo addendo,
$$\lim_{x\to-\infty} \left(-x - \sqrt{1+x^2}\right).$$

Approssimando il radicando con x^2 e ricordando che $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ per $x \to -\infty$, troveremmo
$$\left(-x - \sqrt{1+x^2}\right) \quad \sim \quad -x - (-x) = -x + x,$$

ovvero una *forma indeterminata* che non consente di decidere il risultato del limite. Procediamo con la razionalizzazione e troviamo
$$\lim_{x\to-\infty} \left(-x - \sqrt{1+x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(-x - \sqrt{1+x^2}\right) \cdot \frac{\left(-x + \sqrt{1+x^2}\right)}{\left(-x + \sqrt{1+x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{\left(-x + \sqrt{1+x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{-x - x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{-2x} = 0.$$

Quindi
$$q = \lim_{x\to-\infty} \left[2 - \sqrt{2}\arctan\frac{1}{x} + \left(-x - \sqrt{1+x^2}\right)\right] = 2 + 0 + 0 = 2.$$

In definitiva, la retta di equazione
$$y = x + 2$$

è un ***asintoto obliquo*** per f quando $\boldsymbol{x \to -\infty}$.

Per quanto riguarda il comportamento di f per $x \to +\infty$ si ottengono dei risultati analoghi a quelli appena trovati per $x \to -\infty$.

Risulta

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(2 - \sqrt{1+x^2} - \sqrt{2}\arctan\frac{1}{x}\right) = -\infty.$$

Potrebbe esistere un asintoto obliquo anche per $x \to +\infty$.
Si ha

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2 - \sqrt{1+x^2} - \sqrt{2}\arctan\frac{1}{x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{x} - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{\sqrt{2}\arctan\frac{1}{x}}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{x} - \frac{\sqrt{x^2}}{x} - \frac{\sqrt{2}\arctan\frac{1}{x}}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{x} - \frac{x}{x} - \frac{\sqrt{2}\arctan\frac{1}{x}}{x}\right) = -1.$$

Calcoliamo la q dell'eventuale asintoto obliquo. Risulta

$$q = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - m\cdot x] = \lim_{x\to+\infty} \left[2 - \sqrt{1+x^2} - \sqrt{2}\arctan\frac{1}{x} + x\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[2 - \sqrt{2}\arctan\frac{1}{x} + \left(x - \sqrt{1+x^2}\right)\right].$$

I primi due addendi tendono a 2 e a 0. Per l'ultimo addendo si ha (osservato che l'approssimazione del radicando porta a una forma indeterminata):

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x - \sqrt{1+x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(x - \sqrt{1+x^2}\right) \cdot \frac{\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)}{\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{2x} = 0.$$

In definitiva, per l'algebra dei limiti,

$$q = \lim_{x\to+\infty} \left[2 - \sqrt{1+x^2} - \sqrt{2}\arctan\frac{1}{x} + x\right] = 2.$$

Ne segue che la retta $y = -x + 2$ è un ***asintoto obliquo*** per il grafico di f per $\boldsymbol{x \to +\infty}$.

Calcolare la funzione derivata prima di f e determinarne il dominio, classificando eventuali punti di non derivabilità.

Poiché

$$f(x) = 2 - \sqrt{1+x^2} - \sqrt{2}\arctan\frac{1}{x}$$

segue, dalla applicazione delle regole e dei teoremi di derivazione,

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x - \sqrt{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{0\cdot x-1}{x^2}\right) =$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \sqrt{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}} - \sqrt{2}\cdot\frac{x^2}{x^2+1}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{-x}{(1+x^2)^{1/2}} + \frac{\sqrt{2}}{1+x^2} = \frac{-x(1+x^2)^{1/2}+\sqrt{2}}{1+x^2}.$$

La derivata prima di f è quindi

$$f'(x) = \frac{-x\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}}{1+x^2}.$$

Calcoliamone il dominio.
La radice impone la condizione

$$1+x^2 \geq 0,$$

già posta nel dominio di f.
Il denominatore della frazione deve essere diverso da 0, cioè

$$1+x^2 \neq 0,$$

da cui

$$x^2 \neq -1,$$

vera per ogni valore di x.
Non ci sono quindi condizioni aggiuntive rispetto al dominio di f.

Tuttavia non dobbiamo scordarci che nel dominio di f s'era posto pure

$$x \neq 0.$$

La derivata prima ha quindi dominio

$$\mathrm{dom} f' =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[,$$

che coincide col dominio di f.
Deduciamo che **non esistono punti di non derivabilità** per f.

Studiare la crescenza e decrescenza di f, calcolando, qualora esistano, punti di massimo/minimo relativo e punti di massimo/minimo assoluto per f.

Per prima cosa calcoliamo i *punti stazionari*, vale a dire i punti del grafico di f in cui la *retta tangente è orizzontale*.
Dobbiamo risolvere l'equazione

$$f'(x) = 0$$

nel suo dominio, vale a dire

$$\frac{-x\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}}{1+x^2} = 0 \quad \text{in }]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[.$$

L'equazione precedente è risolta se e solo se il numeratore è uguale a 0, cioè

$$-x\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2} = 0,$$

da cui

$$x\sqrt{1+x^2} = \sqrt{2}.$$

Si tratta di un'equazione irrazionale che, riscritta nella forma

$$\sqrt{1+x^2} = \frac{\sqrt{2}}{x},$$

impone che, per la convenzione per cui una radice quadrata dia sempre un risultato positivo,

$$\frac{\sqrt{2}}{x} > 0,$$

cioè

$$x > 0.$$

Ciò significa che eventuali soluzioni potranno essere accettate solo se maggiori di 0.

Nella condizione $x > 0$, eleviamo al quadrato e troviamo

$$1 + x^2 = \frac{2}{x^2},$$

da cui

$$x^4 + x^2 - 2 = 0.$$

Posto $x^2 = t$, troviamo

$$t^2 + t - 2 = 0$$

che, risolta, dà le due soluzioni

$$t = -2, \quad t = 1.$$

Poiché $t = x^2$, si trova

$$x^2 = -2,$$

che è impossibile, e

$$x^2 = 1$$

che ha le due soluzioni $x = \pm 1$ delle quali, per le condizioni di compatibilità del segno poste poco sopra, accettiamo solo quella positiva, vale a dire $x = 1$.
L'unico ***punto stazionario*** è quindi $\boldsymbol{x = 1}$.

Per capire la natura di tale punto stazionario (massimo relativo, minimo relativo o flesso a tangente orizzontale) dobbiamo studiare il segno della derivata prima, il quale ci dà informazioni circa la crescenza/decrescenza di f.
Risolviamo quindi la disequazione

$$f'(x) \geq 0$$

su $]-\infty, 0[\, \cup\,]0, +\infty[$, vale a dire

$$\frac{-x\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}}{1+x^2} \geq 0.$$

Poiché il denominatore è positivo per ogni x reale (appartenente al dominio), il segno è determinato solamente dal segno del numeratore.
Dobbiamo quindi risolvere

$$-x\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2} \geq 0.$$

Osserviamo che se $x < 0$ la disequazione è sempre verificata: infatti, da $x < 0$ segue $-x > 0$; poiché $\sqrt{1+x^2} > 0$ per ogni x, segue che il membro di sinistra è sempre positivo.
Se, invece, $x > 0$, possiamo scrivere

$$-x\sqrt{1+x^2} \geq -\sqrt{2},$$

ovvero

$$x\sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}.$$

Eleviamo al quadrato entrambi i membri (positivi) e troviamo

$$x^2(1+x^2) \leq 2,$$

da cui

$$x^4+x^2-2 \leq 0,$$

Posto $x^2 = t$ troviamo

$$t^2+t-2 \leq 0,$$

che, risolta, dà

$$-2 \leq t \leq 1,$$

ovvero

$$-2 \leq x^2 \leq 1.$$

La disequazione precedente, tenuto conto che siamo nel caso $x > 0$, è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x^2 \geq -2 \\ x^2 \leq 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

La prima è chiaramente sempre verificata.
La seconda equivale a

$$-1 \leq x \leq 1.$$

Considerata la condizione $x > 0$, segue che il sistema è soddisfatto per

$$0 < x \leq 1.$$

In definitiva, la derivata prima risulta maggiore di 0 per ogni $x < 0$ e per ogni $0 < x < 1$; è minore di zero altrove nel dominio, vale a dire per $x > 1$.

Dal criterio del segno della derivata prima segue che

$$f \text{ è crescente} \quad \text{in} \quad]-\infty, 0[\ \cup\ ]0, 1[, \qquad f \text{ è decrescente} \quad \text{in} \quad]1, +\infty[.$$

Dalla crescenza/decrescenza di f si deduce che $\boldsymbol{x = 1}$ è un punto di ***massimo relativo regolare*** (in quanto stazionario).

Per trovare l'ordinata del punto M di massimo relativo, bisogna sostituire $x = 1$ nell'espressione analitica di f. Si trova

$$y_M = f(1) = 2 - \sqrt{2} - \sqrt{2} \arctan 1 = 2 - \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{4}.$$

Per decidere se il punto M sia di massimo assoluto dobbiamo confrontare la sua ordinata col limite sinistro di f in 0.
Si ha

$$2 - \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{4} < 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

Ne segue che il punto $x = 1$ è di massimo relativo ma NON ASSOLUTO.

Calcolare la derivata seconda di f, studiare concavità e convessità e determinare i punti di flesso.

Riscriviamo la derivata prima di f:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2} - x\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}.$$

Osservato che a numeratore compare un prodotto, si ha

$$f''(x) = \frac{\left(-\sqrt{1+x^2} - x \cdot \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)(1+x^2) - 2x \cdot \left(\sqrt{2} - x\sqrt{1+x^2}\right)}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{-1-x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}} \cdot (1+x^2) - 2x\left(\sqrt{2} - x\sqrt{1+x^2}\right)}{(1+x^2)^2} = \frac{\dfrac{-1-2x^2}{(1+x^2)^{1/2}} \cdot (1+x^2) - 2x\left(\sqrt{2} - x\sqrt{1+x^2}\right)}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{(-1-2x^2)\cdot\sqrt{1+x^2} - 2x\left(\sqrt{2} - x\sqrt{1+x^2}\right)}{(1+x^2)^2} = \frac{-\sqrt{1+x^2} - 2x\sqrt{2}}{(1+x^2)^2},$$

cioè

$$f''(x) = \frac{-\sqrt{1+x^2} - 2x\sqrt{2}}{(1+x^2)^2}.$$

Poniamo $f''(x)$ uguale a 0 risolvendo l'equazione

$$-\sqrt{1+x^2} = 2x\sqrt{2},$$

che può ammettere soltanto soluzioni minori di 0 (per la compatibilità dei segni). Eleviamo al quadrato e troviamo

$$1 + x^2 = 8x^2,$$

da cui

$$x^2 = \frac{1}{7},$$

della quale accettiamo soltanto la radice negativa, vale a dire

$$x = -\frac{1}{\sqrt{7}}.$$

Studiamo la disequazione

$$f''(x) \geq 0$$

per dedurre informazioni sulla concavità della funzione.
La disequazione

$$\frac{-\sqrt{1+x^2}-2x\sqrt{2}}{(1+x^2)^2} \geq 0$$

ha denominatore strettamente maggiore di 0.
Dobbiamo pertanto risolvere

$$-\sqrt{1+x^2}-2x\sqrt{2} \geq 0,$$

da cui

$$\sqrt{1+x^2} \leq -2x\sqrt{2}.$$

Osserviamo subito che se $x > 0$, la disequazione precedente è impossibile in quanto una radice quadrata (che assume sempre valori maggiori o uguali di 0 nel suo dominio) non può essere minore o uguale di un numero negativo (cioè $-2x\sqrt{2}$).
Ciò significa che per $x > 0$ la derivata seconda è sempre negativa (e non si annulla mai).

Se, invece, $x < 0$, la disequazione

$$\sqrt{1+x^2} \leq -2x\sqrt{2}$$

è da risolvere elevando al quadrato entrambi i membri (positivi):

$$1+x^2 \leq 8x^2,$$

da cui

$$7x^2-1 \geq 0.$$

Ricordando che siamo nell'ipotesi $x < 0$, otteniamo che $f''(x) \geq 0$ se e solo se $x \leq -\frac{1}{\sqrt{7}}$.

In definitiva, la derivata seconda è positiva su $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{7}}\right[$ e negativa su $\left]-\frac{1}{\sqrt{7}}, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[$.

Dal criterio del segno della derivata seconda, segue che

f ha concavità rivolta verso l'alto (cioè è *convessa*) in $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{7}}\right[$

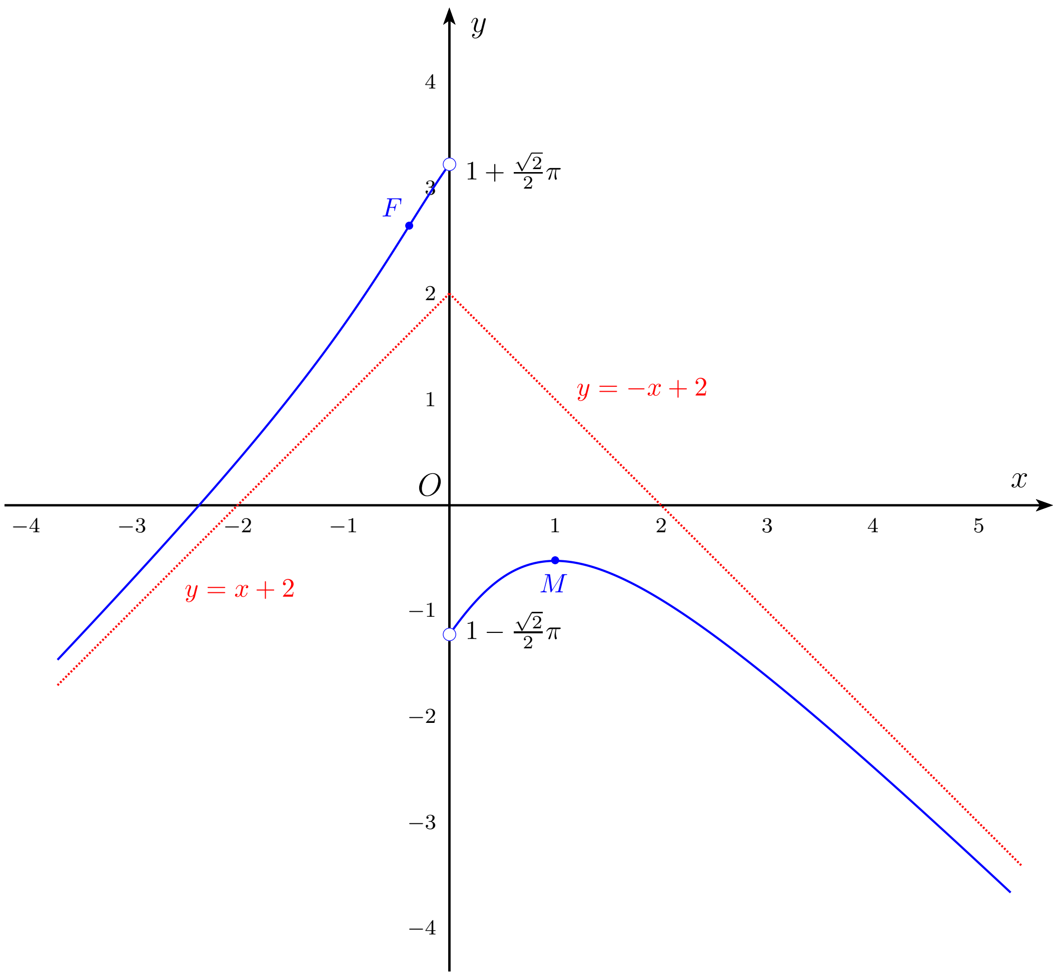
e concavità rivolta verso il basso (cioè è *concava*) in $\left]-\frac{1}{\sqrt{7}}, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[$.

Il punto $\boldsymbol{x = 7}$ in cui si annulla la derivata seconda è un ***punto di flesso a tangente obliqua***, infatti, in tale punto, la funzione passa da concavità verso l'alto a concavità verso il basso.

Per calcolare la y del flesso F sostituiamo $x = -\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ nell'espressione analitica di f:

$$y_F = f\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right) = 2 - \sqrt{1+\frac{1}{7}} - \sqrt{2}\arctan\left(-\sqrt{7}\right) = 2 - \sqrt{\frac{8}{7}} + \sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{7}\right).$$

Tracciare sul foglio di protocollo un grafico qualitativo della funzione f, in accordo con i risultati ottenuti.



2) Determinare il luogo geometrico A degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\frac{2(z+\overline{z})\,(\mathrm{Re}z+3)-4|z|^2}{e^{i\frac{\pi}{2}}(z+\overline{z})-2i}=0.$$

Svolgimento.
Per prima cosa osserviamo che l'equazione assegnata è fratta poiché compare l'incognita z al denominatore di una frazione. Dobbiamo quindi individuare il dominio dell'equazione ponendo il denominatore diverso da 0:

$$e^{i\frac{\pi}{2}}(z+\overline{z})-2i\neq 0.$$

Posto $z=x+iy,\ x,y\in\mathbb{R}$ e osservato che $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$, troviamo

$$i\cdot(x+iy+x-iy)-2i\neq 0,$$

da cui

$$i(2x)-2i\neq 0,$$

ovvero

$$0+i\cdot(2x-2)\neq 0+i\cdot 0.$$

L'equazione è risolta per $x\neq 1$. Ciò significa che sono esclusi dal dominio dell'equazione tutti i punti della retta $x=1$ (vale a dire gli infiniti numeri complessi della forma $1+iy,\ y\in\mathbb{R}$).
Poste le condizioni di esistenza, possiamo risolvere l'equazione assegnata nella quale si chiede che risulti uguale a 0 la frazione

$$\frac{2(z+\overline{z})\,(\mathrm{Re}z+3)-4|z|^2}{e^{i\frac{\pi}{2}}(z+\overline{z})-2i}.$$

Poiché una frazione è uguale a 0 se e soltanto se è uguale a 0 il suo numeratore, dovremo risolvere l'equazione

$$2(z+\overline{z})\,(\mathrm{Re}z+3)-4|z|^2=0,$$

sotto la condizione $x\neq 1$ posta in precedenza.
Scritto $z=x+iy,\ x,y\in\mathbb{R}$, troviamo

$$2(x+iy+x-iy)\,(x+3)-4(x^2+y^2)=0,$$

da cui

$$4x(x+3)-4x^2-4y^2=0$$

che, svolgendo i calcoli e semplificando per 4, diviene

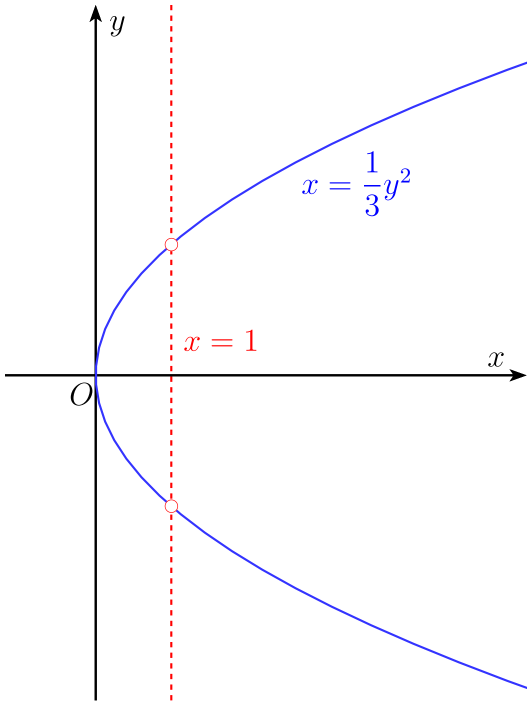
$$3x - y^2 = 0.$$

Si tratta di un'equazione nelle due incognite reali x e y: tale equazione è risolta dagli infiniti punti (x, y) della parabola

$$x = \frac{1}{3}y^2$$

a cui vanni tolti (a causa del dominio dell'equazione) i suoi due punti di ascissa 1.
Precisiamo che si tratta di una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse x (della forma $x = ay^2 + by + c$) e avente il vertice nell'orgine degli assi.

Nella figura seguente mostriamo il luogo geometrico individuato:



3) Discutere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, se esiste il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\left(e^{2/n}-1\right)\sin\left(\alpha^{7n}\right)}{(n-1)!+2\log n}$$

e, in caso affermativo, calcolarlo.

Svolgimento.

Analizziamo i fattori indipendenti da α.
Il termine $n!$ va all'infinito e si presenta già in forma favorevole.
Il fattore

$$\left(e^{2/n}-1\right)$$

è infinitesimo poiché $\frac{2}{n} \to 0$ quando $n \to +\infty$.
Poiché

$$e^y - 1 \quad \sim \quad y \quad \text{per } y \to 0,$$

avremo, posto $y = \frac{2}{n}$,

$$\left(e^{2/n}-1\right) \quad \sim \quad \frac{2}{n} \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Infine, il fattore

$$(n-1)! + 2\log n$$

è dato dalla somma di due infiniti. Dalla scala degli infiniti sappiamo che $(n-1)!$ è un infinito di ordine superiore rispetto a $\log n$. Ne segue che

$$(n-1)! + 2\log n \quad \sim \quad (n-1)! \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Ricordando anche che $n! = n \cdot (n-1)!$, possiamo riscrivere il limite di partenza sostituendo a ciascun fattore il proprio fattore equivalente. Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\left(e^{2/n}-1\right)\sin\left(\alpha^{7n}\right)}{(n-1)!+2\log n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n! \cdot \frac{2}{n} \cdot \sin\left(\alpha^{7n}\right)}{(n-1)!} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n \cdot (n-1)! \cdot \frac{2}{n} \cdot \sin\left(\alpha^{7n}\right)}{(n-1)!} = \lim_{n\to+\infty} 2 \cdot \sin\left(\alpha^{7n}\right).$$

Si tratta ora di discutere il limite al variare del parametro α.
L'argomento del sin è la successione geometrica $\alpha^{7n} = (\alpha^7)^n$.
Poiché

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |q| < 1 \;\; \text{cioè } -1 < q < 1 \\ 1 & \text{se } q = 1 \\ +\infty & \text{se } q > 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1 \end{cases},$$

nel nostro caso avremo, posto $q = \alpha^7$,

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha^7)^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |\alpha^7| < 1 \;\; \text{cioè } -1 < \alpha^7 < 1 \\ 1 & \text{se } \alpha^7 = 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha^7 > 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } \alpha^7 \leq -1 \end{cases},$$

da cui, estraendo la radice settima,

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha^7)^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |\alpha| < 1 \;\; \text{cioè } -1 < \alpha < 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } \alpha \leq -1 \end{cases}.$$

Ne segue che per $\alpha \leq -1$ non esiste il limite

$$\lim_{n\to+\infty} 2 \cdot \sin\left(\alpha^{7n}\right),$$

in quanto non ammette limite l'argomento della funzione sin.
Anche nel caso $\alpha > 1$ non esiste il limite in quanto non esiste il limite

$$\lim_{y\to+\infty} \sin y.$$

Se, invece, $-1 < \alpha < 1$, il limite esiste e vale 0: infatti risulta, posto $y = (\alpha^{7n}) \to 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} 2 \cdot \sin\left(\alpha^{7n}\right) = \lim_{y\to 0} 2 \cdot \sin y = 0.$$

Infine, se $\alpha = 1$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} 2 \cdot \sin\left(\alpha^{7n}\right) = 2 \cdot \sin 1.$$

4) Dicutere, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^{\beta}}{\sqrt{n^6+n}-\sqrt{n^6+1}}.$$

Svolgimento.

La serie è a termini positivi.
Applicheremo il criterio del confronto asintotico che ci consente di individuare una serie dal termine generale più semplice di quella assegnata ma con lo stesso carattere.
Cerchiamo quindi una successione b_n tale che

$$b_n \quad \sim \quad a_n \quad \text{per } n \to +\infty,$$

essendo a_n il termine generale della serie data.

Dobbiamo pertanto analizzare il comportamento di ciascun fattore di a_n per $n \to +\infty$.
Il fattore

$$\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$$

è infinitesimo per $n \to +\infty$, in quanto $\dfrac{1}{n} \to 0$.
Poiché si ha

$$(1-\cos y) \quad \sim \quad \frac{1}{2}y^2 \quad \text{per } y \to 0,$$

avremo, posto $y = \dfrac{1}{n}$,

$$\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) \quad \sim \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2} \quad \text{per } n \to +\infty,$$

da cui, elevando all'esponente β,

$$\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^{\beta} \quad \sim \quad \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\right)^{\beta} = \frac{1}{2^{\beta}}\cdot\frac{1}{n^{2\beta}} \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Consideriamo il fattore a denominatore,

$$\sqrt{n^6+n}-\sqrt{n^6+1}.$$

Se approssimassimo ciascun radicando con il termine di infinito di ordine superiore troveremmo

$$\sqrt{n^6+n}-\sqrt{n^6+1} \quad \sim \quad \sqrt{n^6}-\sqrt{n^6} \;=\; n^3-n^3,$$

vale a dire una forma indeterminata.
Procediamo con la razionalizzazione della frazione. Risulta

$$\sqrt{n^6+n}-\sqrt{n^6+1}=\left(\sqrt{n^6+n}-\sqrt{n^6+1}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^6+n}+\sqrt{n^6+1}}{\sqrt{n^6+n}+\sqrt{n^6+1}}=$$

$$=\frac{n^6+n-(n^6+1)}{\sqrt{n^6+n}+\sqrt{n^6+1}}=\frac{n-1}{\sqrt{n^6+n}+\sqrt{n^6+1}}.$$

A questo punto possiamo approssimare ciascun termine con l'infinito di ordine superiore senza più ottenere forme indeterminate.
Risulta infatti

$$\sqrt{n^6+n}-\sqrt{n^6+1}=\frac{n-1}{\sqrt{n^6+n}+\sqrt{n^6+1}} \;\sim\; \frac{n}{n^3+n^3}=\frac{1}{2n^2} \quad \text{per} \quad n\to+\infty.$$

Siamo pronti a individuare la successione $b_n \sim a_n$ per $n\to+\infty$. Si ha

$$a_n=\frac{\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^{\beta}}{\sqrt{n^6+n}-\sqrt{n^6+1}} \;\sim\; \frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\right)^{\beta}}{\frac{1}{2n^2}}=\frac{2}{2^{\beta}}\cdot\frac{n^2}{n^{2\beta}}=b_n.$$

Dobbiamo quindi individuare per quali β converge la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} b_n=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2}{2^{\beta}}\cdot\frac{n^2}{n^{2\beta}}=\frac{2}{2^{\beta}}\cdot\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n^2}{n^{2\beta}},$$

dal simbolo di sommatoria il termine $\frac{2}{2^{\beta}}$ poiché indipendente da n.
La serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n^2}{n^{2\beta}}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{2\beta-2}}$$

è una serie *armonica generalizzata* e converge se e solo se

$$2\beta-2>1,$$

ovvero

$$\beta>\frac{3}{2}.$$

Per il criterio del confronto asintotico, anche la serie originaria $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n$ converge per $\beta>\frac{3}{2}$. Per $\beta\le\frac{3}{2}$ diverge positivamente.

5) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{24\left(\cos(\sin x) - 1 + \frac{x^2}{2}\right)}{6\left[\arctan(e^x - 1)\right]^4}.$$

Svolgimento.

Osserviamo subito che il denominatore è composto da un unico fattore infinitesimo: infatti, poiché $x \to 0^+$, $e^x \to 1$, da cui $(e^x - 1) \to 0$. Poiché l'arctan è continua in 0, si ha $\arctan(e^x - 1) \to \arctan 0 = 0$ per $x \to 0$.
Possiamo ricorrere alle seguenti approssimazioni dedotte dai limiti fondamentali, senza creare cancellazioni:

$$e^x - 1 \quad \sim \quad x, \qquad \arctan x \quad \sim \quad x \qquad \text{per } x \to 0,$$

Ne segue che

$$\arctan(e^x - 1) \quad \sim \quad \arctan(x) \quad \sim \quad x \quad \text{per } x \to 0,$$

da cui, elevando alla quarta,

$$[\arctan(e^x - 1)]^4 \quad \sim \quad x^4 \quad \text{per } x \to 0.$$

Anche il numeratore è infinitesimo: infatti $\sin x \to 0$ per $x \to 0$, la funzione cos è continua in 0 e tende a $\cos 0 = 1$.
Se ci limitassimo alle approssimazioni

$$\sin x \quad \sim \quad x, \qquad 1 - \cos x \quad \sim \quad \frac{1}{2}x^2 \qquad \text{per } x \to 0$$

dedotte dai limiti notevoli, troveremmo

$$\cos(\sin x) - 1 + \frac{x^2}{2} \quad \sim \quad \cos(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2 \quad \sim \quad 1 - \frac{1}{2}x^2 - 1 + \frac{1}{2}x^2,$$

vale a dire una *cancellazione*, non riuscendo in tal modo a decidere il comportamento del numeratore per $x \to 0$.
Risulta quindi necessario, in questo caso, ricorrere a delle approssimazioni più precise di quelle suggerite dai limiti fondamentali: tali approssimazioni vengono fornite dagli sviluppi di Taylor delle funzioni coinvolte per $x \to 0$.

Ricordiamo che si ha

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \quad \text{per } x \to 0,$$

da cui

$$\cos\left(\sin x\right) = \cos\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right) \quad \text{per } x \to 0.$$

Ricordiamo lo sviluppo del cos in un intorno di 0: si ha

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^5) \quad \text{per } t \to 0.$$

Nel nostro caso avremo, posto $t = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \to 0$,

$$\cos\left(\sin x\right) = \cos\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^4 + o\left(\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^5\right)$$

Poiché il denominatore si comporta come x^4, capiamo che dobbiamo garantire anche al numeratore il trattamento corretto di tutti gli addendi fino a grado 4. Inoltre osserviamo che al termine $\cos(\sin x)$ verr?— aggiunto il polinomio $-1 + \frac{x^2}{2}$. Intuiamo quindi che si canceller?— il termine 1 dello sviluppo e il termine $-\frac{1}{2}x^2$ che si ottiene moltiplicando il termine $-\frac{1}{2}$ per il quadrato della x nella prima parentesi tonda (elevata a potenza 2).
Il grado successivo al grado 2 è il grado 4: dobbiamo quindi individuare TUTTI i termini di grado 4 che si ottengono sviluppando le varie potenze.
Vediamo le varie parentesi:

$$\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^2 = x^2 + \frac{x^6}{6^2} + o(x^8) - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5) + o(x^7) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5)$$

Poiché il primo infinitesimo che abbiamo trascurato è di grado 5, non serve che negli altri termini vengano calcolati in maniera precisa gli addendi con grado maggiore di 4. Della seconda parentesi

$$\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^4 = x^4 + o(x^5)$$

resta solo il primo addendo, tutti gli altri hanno grado superiori a 4; l'approssimazione dell'ultimo $o(...)$ è $o(x^5)$. Quindi al numeratore resta

$$1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5)\right) + \frac{1}{24}(x^4 + o(x^5)) + o(x^5) - 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Possiamo scrivere

$$\left(\cos\left(\sin x\right) - 1 + \frac{x^2}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{24}x^4 - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^4) =$$

$$= \frac{5}{24}x^4 + o(x^4),$$

ovvero

$$\left(\cos(\sin x) - 1 + \frac{x^2}{2}\right) \quad \sim \quad \frac{5}{24}x^4 \quad \text{per } x \to 0.$$

A questo punto possiamo calcolare il limite iniziale sostituendo a ciascun fattore infinitesimo il proprio infinitesimo equivalente individuato. Si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{24\left(\cos(\sin x) - 1 + \frac{x^2}{2}\right)}{6\left[\arctan(e^x - 1)\right]^4} = \lim_{x \to 0^+} \frac{24 \cdot \frac{5}{24}x^4}{6x^4} = \frac{5}{6}.$$

6) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)\,|\log(x-1)| & \text{se } x > 1 \\ 0 & \text{se } x \leq 1 \end{cases}.$$

Dopo aver verificato che la funzione è continua sul suo dominio, determinare il dominio della derivata prima e classificare eventuali punti di non derivabilità.

Svolgimento.

Per $x \neq 1$ la funzione f è sicuramente continua: per $x < 1$ è la funzione costante $f(x) = 0$, quindi continua; per $x > 1$ si tratta di una funzione continua perché composizione e prodotto di funzioni continue per $x > 1$.
Resta da indagare il punto $x = 1$ in cui si spezza l'espressione analitica di f.
Poiché $x = 1$ è di accumulazione per dom$f$, avremo che f è continua in $x = 1$ se e solo se

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1).$$

In base alla definizione di f si ha immediatamente

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 0.$$

Calcoliamo il limite destro:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x-1)\,|\log(x-1)|\,.$$

Posto $y = (x-1) \to 0^+$ per $x \to 1^+$, avremo, dal teorema di sostituzione,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x-1)\,|\log(x-1)| = \lim_{y\to 0^+} y \cdot |\log y| = 0,$$

grazie al limite fondamentale

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \cdot (\log x)^\beta = 0 \quad \text{per ogni } \alpha, \beta > 0.$$

Abbiamo quindi provato che

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 0,$$

per cui la funzione f è continua in $x = 1$.

Calcoliamo le derivate utilizzando le usuali regole di derivazione.

La derivata di $f(x) = 0$ è banalmente $f'(x) = 0$.
Calcoliamo, invece, la derivata prima della funzione

$$f(x) = (x-1)\,|\log(x-1)| \quad \text{per } x > 1.$$

Ricordando la formula della derivata del prodotto e di funzioni composte, si trova

$$f'(x) = 1 \cdot |\log(x-1)| + (x-1) \cdot \frac{|\log(x-1)|}{\log(x-1)} \cdot \frac{1}{x-1} = |\log(x-1)| + \frac{|\log(x-1)|}{\log(x-1)} =$$

$$= |\log(x-1)| \cdot \left(1 + \frac{1}{\log(x-1)}\right).$$

Ci accorgiamo immediatamente della presenza di un denominatore. Dobbiamo quindi porre

$$\log(x-1) \neq 0,$$

da cui

$$x - 1 \neq 1,$$

ovvero

$$x \neq 2.$$

Dovremo analizzare il comportamento della derivata prima per $x \to 2$.
Prima, però, studiamo il valore assoluto

$$|\log(x-1)|$$

applicando la definizione.
Si ha

$$|\log(x-1)| = \begin{cases} \log(x-1) & \text{se } \log(x-1) > 0 \\ -\log(x-1) & \text{se } \log(x-1) < 0 \end{cases}.$$

Poiché la disequazione

$$\log(x-1) > 0$$

equivale a

$$\log(x-1) > \log 1,$$

da cui, per la crescenza della funzione log,

$$x - 1 > 1,$$

ovvero

$$x > 2,$$

avremo che

$$|\log(x-1)| = \begin{cases} \log(x-1) & \text{se } x > 2 \\ -\log(x-1) & \text{se} x < 2 \end{cases}.$$

La derivata prima della funzione f è dunque

$$f'(x) = \begin{cases} -\log(x-1) \cdot \left(1 + \dfrac{1}{\log(x-1)}\right) & \text{se } 1 < x < 2 \\ \\ \log(x-1) \cdot \left(1 + \dfrac{1}{\log(x-1)}\right) & \text{se } x > 2 \\ \\ 0 & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Si osserva che f è sicuramente derivabile negli intervalli $]-\infty, 1[$, $]1, 2[$ e $]2, +\infty[$.
Resta da studiare il comportamento della derivata prima per $x \to 1$ e per $x \to 2$, individuando eventuali punti di non derivabilità per f.
Osserviamo che siamo nelle ipotesi per poter utilizzare il teorema del limite della derivata: infatti, per quanto provato in precedenza, la funzione f è continua in tutto il suo dominio e derivabile negli intervalli scritti poco sopra.
Calcoleremo i limiti della derivata per $x \to 1$ e $x \to 2$: nel caso in cui tali limiti esistano, saranno uguali alle derivate sinistre e destre di f.
Cominciamo con $x = 1$.
Si ha

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} 0 = 0.$$

Poiché il limite esiste possiamo dire che

$$f'_-(1) = 0.$$

Calcoliamo il limite destro, vale a dire

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} \left\{ -\log(x-1) \cdot \left(1 + \frac{1}{\log(x-1)}\right) \right\}.$$

Posto $(x-1) = y \to 0^+$ per $x \to 1^+$ e osservato che

$$\lim_{y\to 0^+} \log y = -\infty \quad \text{da cui} \quad \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{\log y} = 0,$$

avremo

$$\lim_{x\to 1^+} \left\{ -\log(x-1) \cdot \left(1 + \frac{1}{\log(x-1)}\right)\right\} = \lim_{y\to 0^+} -\log y \cdot \left(1 + \frac{1}{\log y}\right) = +\infty,$$

da cui

$$f'_+(1) = +\infty.$$

Poiché

$$f'_-(1) = 0 \quad \text{e} \quad f'_+(1) = +\infty,$$

segue che $\boldsymbol{x = 1}$ è un **punto di non derivabilità** per f, in particolare è un **punto angoloso**.

Analizziamo ora il punto $x = 2$ calcolando il limite della derivata prima.
Poiché per $x \to 2^-$ si ha $(x-1) \to 1^-$ da cui $\log(x-1) \to 0^-$, il limite

$$\lim_{x\to 2^-} \left\{ -\log(x-1) \cdot \left(1 + \frac{1}{\log(x-1)}\right)\right\}$$

si presenta nella forma indeterminata $[0 \cdot \infty]$.
Conviene fare qualche calcolo sulla frazione:

$$-\log(x-1) \cdot \left(1 + \frac{1}{\log(x-1)}\right) = -\log(x-1) \cdot \frac{\log(x-1)+1}{\log(x-1)} = -\left[\log(x-1)+1\right],$$

dove la semplificazione è lecita in quanto stiamo supponendo $x \neq 2$.
Risulta quindi

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} -\left[\log(x-1)+1\right] = -1 = f'_-(2).$$

Analogamente si ha

$$\lim_{x\to 2^+} \log(x-1) \cdot \left(1 + \frac{1}{\log(x-1)}\right) = \lim_{x\to 2^+} \left[\log(x-1)+1\right] = +1 = f'_+(2).$$

Poiché

$$f'_-(2) = -1 \quad \text{e} \quad f'_+(2) = +1,$$

segue che anche il punto $\boldsymbol{x = 2}$ è di ***non derivabilità*** per f, in particolare è un ***punto angoloso***.

7) Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^2 \frac{(\log x)^2 + x^2 + 7}{x}\, dx.$$

Svolgimento.

Il dominio della funzione è $]0, +\infty[$ ed f è continua nel suo dominio perché composizione, somma e quoziente di funzioni continue in $]0, +\infty[$.
In particolare, f è continua sull'intervallo di integrazione $]1, 2[$, pertanto, per il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale, risulta

$$\int_1^2 f(x)\, dx = F(2) - F(1),$$

essendo F una qualsiasi primitiva di f.
Calcoliamo quindi $F(x)$ per mezzo dell'integrale indefinito

$$\int \frac{(\log x)^2 + x^2 + 7}{x}\, dx.$$

Si ha

$$\frac{(\log x)^2 + x^2 + 7}{x} = \frac{(\log x)^2}{x} + x + \frac{7}{x},$$

da cui, per le proprietà di linearità dell'integrale,

$$\int \frac{(\log x)^2 + x^2 + 7}{x}\, dx = \int \left(\frac{(\log x)^2}{x} + x + \frac{7}{x} \right) dx.$$

Si ha banalmente, osservato che $x > 0$, quindi $|x| = x$,

$$\int x\, dx = \frac{x^2}{2} + c_1, \qquad \int \frac{7}{x}\, dx = 7 \cdot \int \frac{1}{x}\, dx = 7 \log |x| + c_2 = 7 \log |x| + c_2,$$

con c_1, c_2 costanti reali.
Rimane da calcolare

$$\int \frac{(\log x)^2}{x}\, dx = \int \frac{1}{x} \cdot (\log x)^2\, dx.$$

Osservato che $\dfrac{1}{x}$ è la derivata prima di $\log x$, conviene operare una sostituzione.
Poniamo

$$\log x = y,$$

da cui, derivando alla Leibniz,

$$\frac{1}{x}\,dx = dy.$$

Per il teorema di sostituzione degli integrali indefiniti risulta

$$\int \frac{1}{x} \cdot (\log x)^2\,dx = \int (y)^2\,dy = \frac{y^3}{3} + c_3 = \frac{(\log x)^3}{3} + c_3.$$

In definitiva si ha

$$\int \frac{(\log x)^2 + x^2 + 7}{x}\,dx = \int \frac{(\log x)^2}{2}\,dx + \int x\,dx + \int \frac{7}{x}\,dx = \frac{(\log x)^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 7\log x + c.$$

Scegliamo, per comodità, la primitiva con $c = 0$:

$$F(x) = \frac{(\log x)^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 7\log x.$$

Possiamo ora calcolare l'integrale definito:

$$\int_1^2 f(x)\,dx = F(2) - F(1) = \frac{(\log 2)^3}{3} + \frac{4}{2} + 7\log 2 - \left(\frac{(\log 1)^3}{3} + \frac{1}{2} + 7\log 1\right) =$$

$$= \frac{(\log 2)^3}{3} + \frac{3}{2} + 7\log 2.$$

8) Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{e^{\tan x}}{y\cos^2 x} \\ y(0) = -2\sqrt{2} \end{cases} .$$

Svolgimento.

L'equazione proposta è a variabili separabili, vale a dire della forma

$$y' = g(x) \cdot h(y),$$

con h e g funzioni continue.
Si ha infatti

$$y' = \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{y},$$

in cui

$$g(x) = \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}, \qquad h(y) = \frac{1}{y}.$$

Osserviamo che $h(y)$ è sempre diversa da 0, quindi non ci sono soluzioni costanti per l'equazione differenziale.

Supposto $y(x) \neq 0$, procediamo separando le variabili.
Risulta

$$y \cdot y' = \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x},$$

da cui, scritto

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

troviamo

$$y\,dy = \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx.$$

Integriamo entrambi i mebri dell'equazione e otteniamo

$$\int y\,dy = \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx.$$

L'integrale a primo membro è presto calcolato:

$$\int y\,dy = \frac{y^2}{2} + c.$$

Calcoliamo l'integrale a secondo membro,

$$\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx = \int e^{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$

per mezzo di una sostituzione (osserviamo infatti che la deriva di $\tan x$ è proprio $\frac{1}{\cos^2 x}$).
Poniamo

$$\tan x = y,$$

da cui, derivando alla Leibniz,

$$\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = dy.$$

Grazie al teorema di sostituzione troviamo

$$\int e^{\color{blue}{\tan x}} \cdot \color{red}{\frac{1}{\cos^2 x}\,dx} = \int e^{\color{blue}{y}}\,\color{red}{dy} = e^y + c = e^{\tan x} + c.$$

L'uguaglianza integrale

$$\int y\,dy = \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$$

diviene quindi

$$\frac{y^2}{2} = e^{\tan x} + c,$$

dove abbiamo scritto una sola costante additiva di integrazione.
A questo punto imponiamo che la soluzione y del problema di Cauchy soddisfi la condizione

$$y(0) = -2\sqrt{2},$$

ovvero che il suo grafico passi per il punto di coordinate $(0, -2\sqrt{2})$.
Sostituiamo quindi a y il valore $-2\sqrt{2}$ e a x il valore 0 nell'uguaglianza scritta poco sopra.
Si ha

$$\frac{\left(-2\sqrt{2}\right)^2}{2} = e^{\tan 0} + c,$$

da cui

$$4 = e^0 + c,$$

che, risolta, dà $c = 3$.
Sostituiamo quindi a c il valore 1 e troviamo

$$\frac{y^2}{2} = e^{\tan x} + 3,$$

da cui

$$y^2 = 2\left(e^{\tan x} + 3\right).$$

Per esplicitare y dobbiamo ricordare che, nel punto $x = 0$, si ha $y = -2\sqrt{2}$, cioè la funzione assume un valore negativo. Ne segue che, nel risolvere l'equazione, dovremo anteporre alla radice quadrata il segno $-$.
La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y = -\sqrt{2\left(e^{\tan x} + 3\right)}.$$