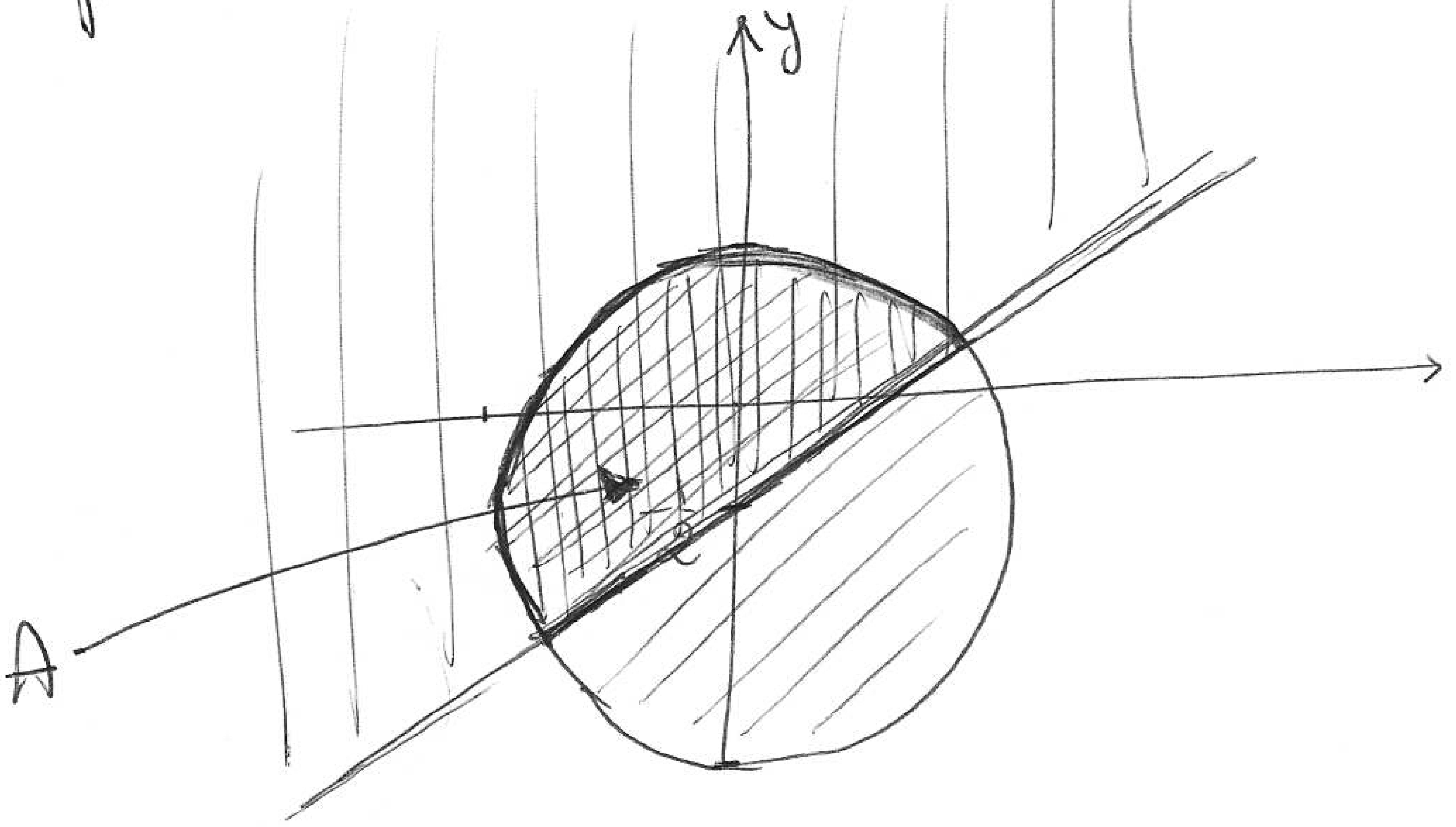
$\operatorname{Im} z = y \qquad \operatorname{Re} z = x$

Allora il sistema diventa
$$\begin{cases} x^2+y^2+y \leq 2 \\ y \geq x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

la prima disequazione individua i punti interni alla e sulla crf di eqz $x^2+y^2+y-2=0$
(la crf ha centro in $(0, -\frac{1}{2})$ e $r = \frac{3}{2}$)

la seconda disequazione individua i punti sopra e sulla retta di eq $y = x - \frac{1}{2}$ (che passa per il centro della crf)



Quindi l'intersezione tra le due regioni di piano è un semicerchio, bordo incluso.

---

3) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{(n+1)!} \log(e^{n!}+1)}{\sqrt{(n!)^2+n!} - (n!+2)} = \cancel{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)\,n!} \cdot \log(e^{n!})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{n}{(n+1)\,n!} \log(e^{n!})\right]\cdot\left[\sqrt{(n!)^2+n!} + (n!+2)\right]}{\left[\sqrt{(n!)^2+n!} - (n!+2)\right]\cdot\left[\sqrt{(n!)^2+n!} + (n!+2)\right]} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{1 \leftarrow}{\frac{n}{(n+1)}} \frac{1}{\cancel{n!}} \cdot \cancel{n!} \cdot [n! + n!]}{(n!)^2 + n! - (n!+2)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n!}{\cancel{(n!)^2} + n! - \cancel{(n!)^2} - 4 - 4n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n!}{-3n! - 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n!}{-3n!} = -\frac{2}{3}$$

OSS Al denominatore ho due contributi $\sqrt{(n!)^2+n!}$ e $(n!+2)$ con lo stesso ordine di infinito e segno opposto.

~~e altri termini di ordi~~

I due contributi però, non essendo uguali, ma avendo anche altri addendi di ordine inferiore, non possono essere semplificati tenendo solo l'addendo di ordine superiore, cioè non posso dire

$$\sqrt{(n!)^2+n!} - (n!+2) \sim n! - n! = 0$$

I due termini ordine principale si annullano, ma restano i termini di ordine + basso, che acquistano importanza nel momento in cui i due principali si annullano.
Per non perdere contributi significativi, bisogna razionalizzare, non facendo errori e tenendo tutti gli addendi.

---

4) sia $\alpha > 0$. Discutere la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\alpha^n \left(\sqrt{1-n\sin\frac{1}{n}}\right)^2}_{a_n}$$

$$a_n = \alpha^n \left(\sqrt{1-n\sin\frac{1}{n}}\right)^2 = \alpha^n \left(1-n\sin\frac{1}{n}\right)$$

Anzitutto cerco $b_n \sim a_n$ per $n\to\infty$ in modo da applicare il criterio del confronto asintotico e semplificare la serie

$$\Rightarrow a_n = \alpha^n\left(1 - n\sin\frac{1}{n}\right) = \alpha^n\left(1 - n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) =$$

$$= \alpha^n\left(\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \sim \frac{\alpha^n}{6n^2} = b_n \quad \text{per } n \to \infty$$

Il criterio del confr. asint. dice che

$\sum_1 a_n \sim \sum_1 b_n$ (cioè si comportano allo stesso modo)

Quindi studio $\sum_1 b_n$

Posso applicare il criterio del rapporto o della radice.

Con il criterio del rapporto, devo calcolare

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad e: \quad \begin{array}{l} \text{se } l < 1 \Rightarrow \sum_1 b_n \text{ conv} \\ \text{se } l > 1 \Rightarrow \sum_1 b_n \text{ div} \\ \text{se } l = 1 \Rightarrow \text{non posso concludere} \end{array}$$

calcolo $l = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{\cancel{6}(n+1)^2} \cdot \frac{\cancel{6}n^2}{\alpha^n} = \lim_{n\to\infty} \alpha \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2}_{\downarrow\, 1} =$

$= \alpha$

Quindi se $l = \alpha < 1 \Rightarrow \sum_1 b_n$ conv e $\sum_1 a_n$ conv

se $l = \alpha > 1 \Rightarrow \sum_1 b_n$ div e $\sum_1 a_n$ div

se $l = \alpha = 1$ il criterio non dice nulla, ma ora sostituisco $\alpha = 1$ in $\sum_1 b_n$ e trovo $\sum_1 b_n = \sum_1 \frac{1}{6n^2}$

che è una serie armonica generalizzata con parametro $\lambda > 1$ $\left(\sum_1 \frac{1}{n^\lambda}\right)$ e quindi converge.

Concludo che la serie data converge per $0 \le \alpha \le 1$ e diverge per $\alpha > 1$.

Volendo applicare il criterio della radice (invece di quello del rapporto), devo calcolare

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\alpha^n}{6n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha}{6^{1/n}} \cdot \frac{1}{n^{2/n}} =$$

9

$$= \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6^{1/n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^{1/n}}\right)^2 = \alpha \Rightarrow \ell = \alpha$$

$6^{1/n} \to 6^0 = 1$, $\quad n^{1/n} \to 1$

Si ragiona come con il criterio del rapporto e si ha la medesima conclusione.

---

5) $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \le 0 \\ 1 + \sqrt{x\,|\log(x) - 1|} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Studiare la derivabilità.

Anzitutto guardo se f è continua in $x=0$ perché se non è cont, non può nemmeno essere derivabile.

Calcolo $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left[1 + \sqrt{x\,|\log(x) - 1|}\right] =$

per $x \to 0^+$ $\log x \to -\infty$ $\Rightarrow \log x - 1 < 0$ e $|\log x - 1| = 1 - \log x$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left[1 + \sqrt{x(1-\log x)}\right] = \lim_{x\to 0^+}\left[1 + \sqrt{\underset{\downarrow\,0}{x} - \underset{\downarrow\,0}{\underbrace{x\log x}}}\right]$$

per il limite fondamentale $\lim_{x\to 0^+} x \log x = 0$

$= 1$

$f(0) = 1$ (dalla def di f)

e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$ $\quad \Rightarrow f$ è continua in 0.

Calcolo $f'(x)$: $\qquad$ osservare che non c'è $\ell' =$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ 0 + \dfrac{1}{2\sqrt{x\,|\log x - 1|}} \cdot \left[1 \cdot |\log x - 1| + \cancel{x} \cdot \dfrac{|\log x - 1|}{\log x - 1} \cdot \dfrac{1}{\cancel{x}}\right] & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

Quando una funz è definita a tratti, è possibile che