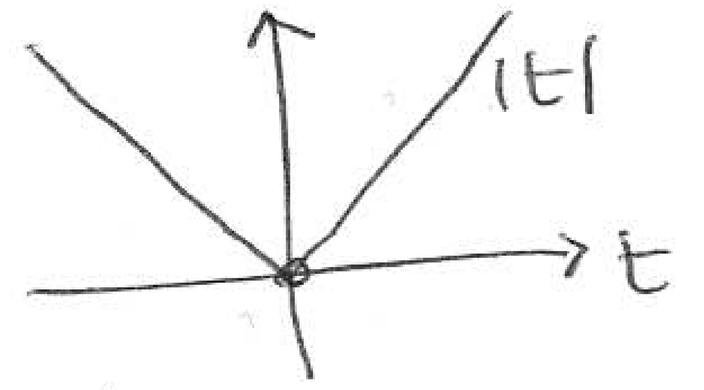
Svolgimento appello di Analisi 1
del 22 marzo 2016

1) $f(x) = 12e^{-x} - x + 2\log|e^x - 2|$

dom f : $|e^x - 2| > 0 \iff e^x - 2 \neq 0 \iff x \neq \log 2$

(infatti il $|t| \geq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$ e si annulla solo quando $t = 0$

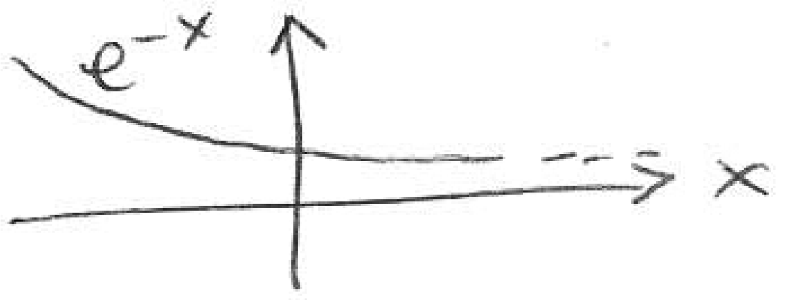


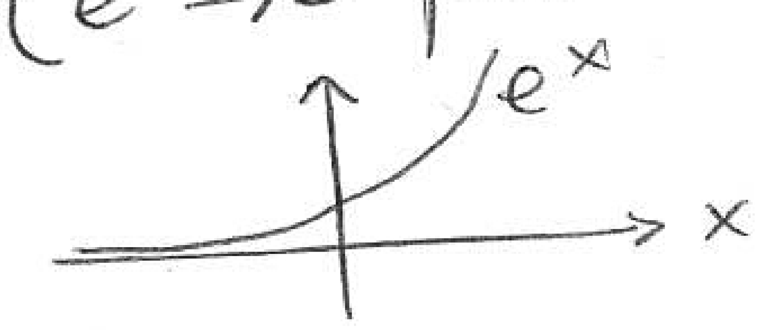
)

$\Rightarrow$ dom $f = (-\infty, \log 2) \cup (\log 2, +\infty)$

• $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \Big(\underbrace{12e^{-x}}_{\downarrow\, +\infty} \underbrace{- x}_{\downarrow\, +\infty} + \underbrace{2\log|e^x - 2|}_{\downarrow\, +2\log 2} \Big) = +\infty$

($e^{-x} \to +\infty$ per $x \to -\infty$) ($e^x \to 0$ per $x \to -\infty$)





• $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \Big(\underbrace{12e^{-x}}_{\downarrow\, 0} \underbrace{- x}_{\downarrow\, -\infty} + \underbrace{2\log|e^x - 2|}_{\sim 2 \cdot \log e^x = 2x \to +\infty \text{ per } x \to +\infty} \Big) = -\infty + \infty$

tuttavia osservo che

$\hookrightarrow \ = \lim_{x \to +\infty} \big(\underbrace{12e^{-x}}_{\downarrow\, 0} - x + 2x \big) = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

Vedo se ci sono as. obliqui.

per $x \to -\infty$: l'addendo più importante è $12e^{-x}$

(x è una retta e $2\log|e^x - 2| \to 2\log 2$)

$\Rightarrow$ la funzione si comporta come e^{-x} per $x \to -\infty$ e non può avere asintoto obliquo. Inoltre deduco anche che f avrà concavità rivolta verso l'alto (come e^{-x}) per $x \to -\infty$.

per $x \to +\infty$:

tolgo il modulo perché $x \to +\infty \Rightarrow e^x - 2 > 0$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \Big(\underbrace{\frac{12e^{-x}}{x}}_{\downarrow\, 0} - 1 + \underbrace{2\,\frac{\log(e^x - 2)}{x}}_{(*)} \Big) = -1 + 2 = 1$$

(vince l'esponenziale)

~~$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2\log(e^x(1-2e^{-x}))}{x}$~~

$(*)$ $$\lim_{x \to +\infty} \frac{2\log(e^x - 2)}{x} = 2 \lim_{x \to +\infty} \frac{\log e^x}{x} = 2 \cdot 1 = 2$$

$$q = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty} \Big(\underbrace{12e^{-x}}_{\downarrow\, 0} - x + \underbrace{2\log(e^x - 2)}_{\sim 2x} - x \Big) = 0$$

Altro modo per mostrare che $q = 0$:

$$= \lim_{x \to +\infty} \Big(\underbrace{12e^{-x}}_{\to 0} - x + 2\log\big(e^x \cdot (1 - 2e^{-x})\big) - x \Big) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \Big(-2x + 2\big(\underbrace{\log e^x}_{x} + \log(1 - 2e^{-x}) \big) \Big) = \lim_{x \to +\infty} \big(\cancel{-2x} + \cancel{2x} + \log(1 - 2e^{-x}) \big)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \log(1 - 2e^{-x}) = 0$$

$\Rightarrow y = x$ è as. obliquo destro.

- $$\lim_{x \to (\log 2)^+} f(x) = \lim_{x \to (\log 2^+)} \Big(\underbrace{12e^{-x}}_{\downarrow\, \frac{12}{2}} - \underbrace{x}_{\downarrow\, \log 2} + \underbrace{2\log|e^x - 2|}_{\downarrow\, 2\log|2^+ - 2| \to -\infty} \Big) = -\infty$$

- $$\lim_{x \to (\log 2)^-} f(x) = \lim_{x \to (\log 2)^-} \Big(\underbrace{12e^{-x}}_{\downarrow\, \frac{12}{2}} - \underbrace{x}_{\downarrow\, \log 2} + 2\log\underbrace{|e^x - 2|}_{\downarrow\, |0^-| \to -\infty} \Big) = -\infty$$

$$\frac{12}{2} - \log 2 + \underbrace{|0^-|}_{\downarrow\, -\infty} = -\infty$$

$\Rightarrow x = \log 2$ è as. verticale completo

$$f'(x) = -12e^{-x} - 1 + 2\frac{1}{\cancel{|e^x-2|}}\cdot\frac{\cancel{|e^x-2|}}{e^x-2}\cdot e^x = -12e^{-x} - 1 + \frac{2e^x}{e^x-2}$$

$\text{dom} f' = \{x \in \mathbb{R} : x = \log 2\} = \text{dom} f$ $\Rightarrow$ non ci sono punti di non derivabilità.

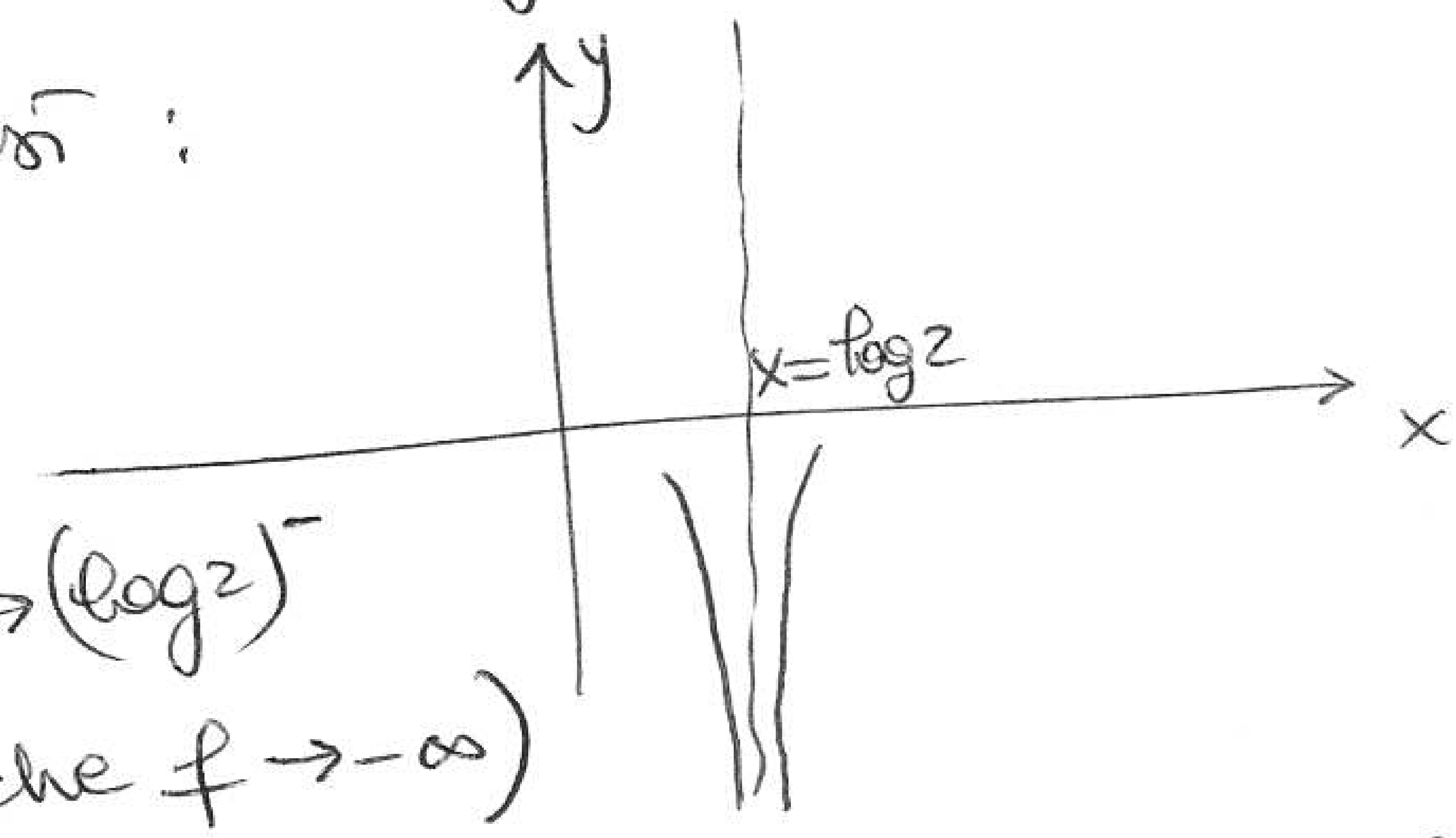
<u>OSS</u>: Qualcuno ha calcolato

$\lim_{x \to (\log 2)^\pm} f'(x)$ e ha trovato $\mp\infty$

Il risultato è corretto, ma siccome $x = \log 2 \notin \text{dom} f$

non posso dire che $x = \log 2$ sia un punto di cuspide

la funzione è così:



è chiaro che per $x \to (\log 2)^-$

$f'_- \to -\infty$ (ma anche $f \to -\infty$)

Analogamente per $x \to (\log 2)^+$ si ha $f'_+ \to +\infty$, ma anche

qui $f(x) \to -\infty$ e non ho una cuspide.

$f'(x) \geq 0$ $\qquad -12e^{-x} - 1 + \frac{2e^x}{e^x-2} \geq 0$

$-\frac{12}{e^x} - 1 + \frac{2e^x}{e^x-2} \geq 0$; $\quad \frac{-12(e^x-2) - e^x(e^x-2) + 2e^x \cdot e^x}{e^x(e^x-2)} \geq 0$

$\frac{-12e^x + 24 - e^{2x} + 2e^x + 2e^{2x}}{e^x(e^x-2)} \geq 0$; $\quad \frac{e^{2x} - 10e^x + 24}{e^x(e^x-2)} \geq 0$

N: pongo $t = e^x$ $\quad t^2 - 10t + 24 \geq 0$ $\quad t_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25-24} = 5 \pm 1 = \begin{cases} 6 \\ 4 \end{cases}$

$N \geq 0$ se $t \leq 4 \cup t \geq 6$.

$e^x \leq 4 \cup e^x \geq 6$

$x \leq \log 4 \cup x \geq \log 6$

$D>0$: $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$e^x - 2 > 0 \qquad x > \log 2$

		$\log 2$		$\log 4$		$\log 6$	
N	+		+		−		+
D: e^x	+		+		+		+
D: e^x-2	−		+		+		+
f'	−		+		−		+
f	↘	as. vert	↗	⌒	↘	⌣	↗

Valuto $f(\log 4) = +12\, e^{-\log 4} - \log 4 + 2 \log\left(e^{\log 4} - 2\right)$

$$= \frac{12}{4} - \cancel{\log 4} + \cancel{2 \log 2} = 3$$

$$f(\log 6) = 12\, e^{-\log 6} - \log 6 + 2 \log\left(e^{\log 6} - 2\right)$$

$$= \frac{12}{6} - \log \underset{2\cdot 3}{6} + 2 \log 4 = 2 - \log 2 - \log 3 + 4 \log 2 =$$

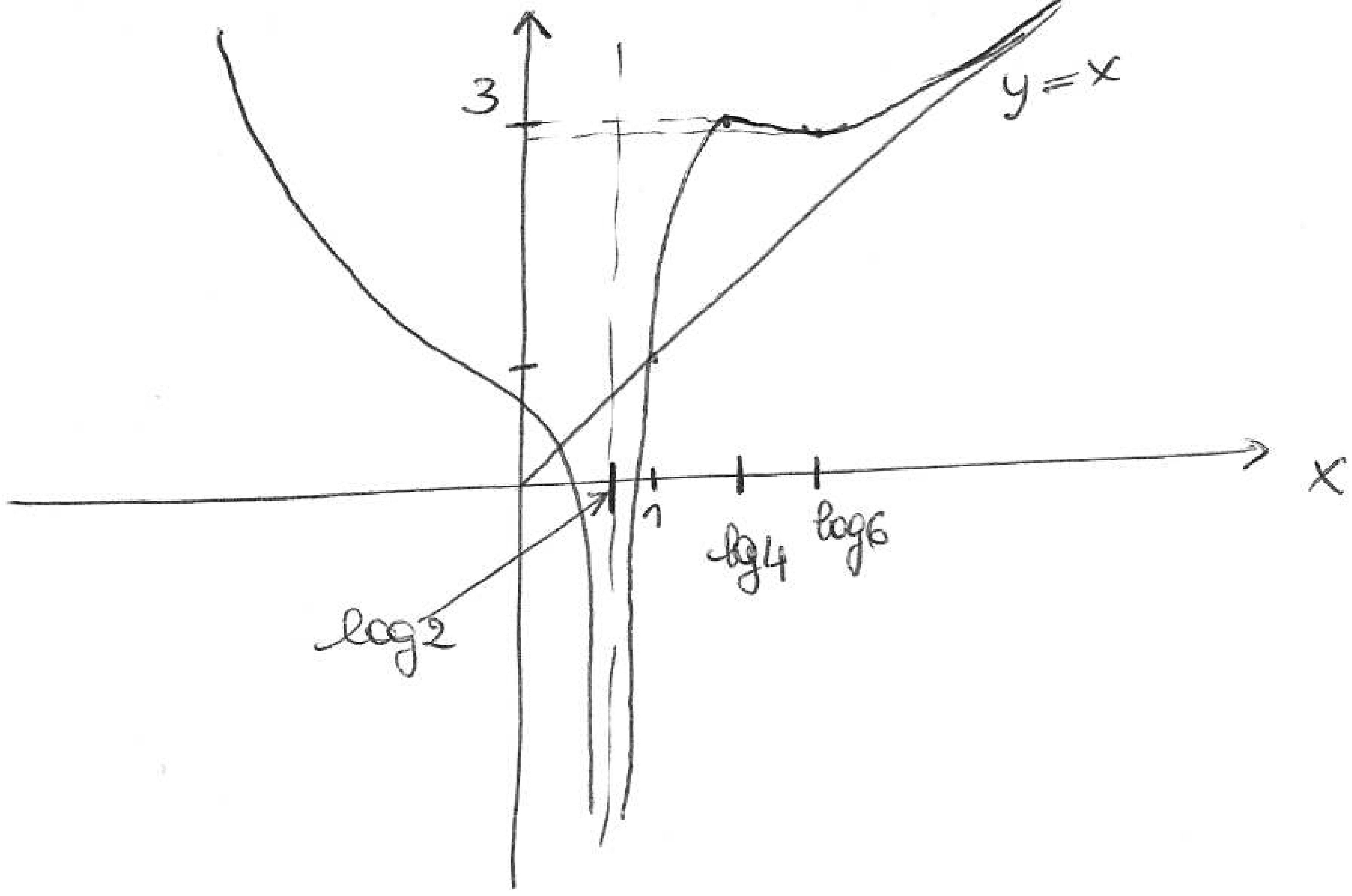
$$= 2 + 3 \log 2 - \log 3 = (*)$$

Siccome $\log e = 1$ e $2 < e < 3$ $\Rightarrow$

$\log 2$ sarà poco meno di 1, ~ 0.7

e $\log 3$ sarà poco più di $1 \sim 1.1$

$(*) \sim 2 + 2.1 - 1.1 \sim 3$ $\rightarrow$ siccome lo studio della f' ci dice che $\log 4$ è pto di max e $\log 6$ è pto di min $\underbrace{f(\log 6)}_{\sim 3} < \underbrace{f(\log 4)}_{=3}$



$x = \log 4$ è pto di max relativo staz.

$x = \log 6$ è pto di min relativo staz.

∄ pti di max e min assoluti perché f è illimitata

Avremo un flesso per $x < \log 2$ perché per $x \to -\infty$ $f \sim e^{-x}$ (con la concav verso l'alto) e per $x \to (\log 2)^-$ $f \to -\infty$ (cioè ha concav verso il basso)

L'altro flesso sarà tra i pti di max e min relativo stazionari.

Non ci sono elementi per dire che ∃ altri flessi.

---

2) ? luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} Re\left(\bar{z}(z+i)\right) \leq 2 \\ Im\, z \geq Re\, z - \frac{1}{2} \end{cases}$$

prendo $z = x+iy$

$Re\left(\bar{z}(z+i)\right) = Re\left((x-iy)(x+iy+i)\right) = Re\left(x^2 \cancel{-ixy} \cancel{+ixy} - i^2y^2 + xi - i^2y\right) =$

$= Re\left(x^2 + y + xi + y^2\right) = x^2+y^2+y$