$$= \int \frac{t+2-2}{(t+2)^2}\,dt = \int \frac{t+2}{(t+2)^2}\,dt - 2\int \frac{dt}{(t+2)^2} =$$

$$= \int \frac{1}{(t+2)}\,dt - 2\int \frac{dt}{(t+2)^2} =$$

$$= \log|t+2| + 2\,\frac{1}{(t+2)} + C =$$

$$= \log(e^x+2) + 2\,\frac{1}{e^x+2} + C = F(x)$$

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\log(\underset{\downarrow\, 0}{e^x}+2) + \frac{2}{\underset{\downarrow\, 0}{e^x}+2} + C\right] = \log 2 + 1 + C$$

e questo deve essere $= \log 2 \Rightarrow C = -1$

$$F(x) = \log(e^x+2) + \frac{2}{e^x+2} - 1 = \log(e^x+2) - \frac{e^x}{e^x+2}$$

---

8) $\begin{cases} xy' + 3y = \dfrac{2}{x^2} \\ y(1) = 3 \end{cases}$

divido per x per ricondurmi alla forma canonica

$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ delle eq. diff del 1° ordine a coeff variabili.

$\Rightarrow \begin{cases} y' + \dfrac{3}{x}y = \dfrac{2}{x^3} \\ y(1) = 3 \end{cases} \Rightarrow a(x) = \dfrac{3}{x} \quad b(x) = \dfrac{2}{x^3} \quad x_0 = 1 \quad y_0 = 3$

calcolo $A(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt = \int_1^x \frac{3}{t}\,dt = \Big[3\log|t|\Big]_1^x = 3\log|x|$

poiché $x_0 = 1 > 0$ e cerco una soluzione del problema di Cauchy in un intorno "piccolo" $I(x_0)$, posso assumere che $x > 0$

allora tolgo il modulo e $A(x) = 3\log x = \log x^3$

$$e^{A(x)} = e^{\log x^3} = x^3$$

Calcolo $\displaystyle\int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\,dt = \int_1^x \frac{2}{\cancel{t^3}}\cdot \cancel{t^3}\,dt = \left[2t\right]_1^x = 2x-2$

La soluzione è $\displaystyle y(x) = \frac{1}{e^{A(x)}}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\,dt\right] =$

$$= \frac{1}{x^3}\left[3+2x-2\right] = \frac{1}{x^3}(1+2x) = \frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^2}$$

---

5) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1+x^2-e^{x\sin x}+\log\left(1+\frac{4}{3}x^4\right)}{4x^2\left[e^x-\frac{1}{2}\left(1+e^{2x}\right)\right]} = \frac{0}{0} \Rightarrow$ Taylor

Parto dal numeratore, osservo che $\log\left(1+\frac{4}{3}x^4\right) = \frac{4}{3}x^4 + o(x^4)$ dà come prima potenza 4 $\Rightarrow$ sviluppo $e^{x\sin x}$ tenendo tutti i termini fino a grado 4 (finale)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

mi fermo qui perché poi ho $x\cdot\sin x$, x alza di 1 il grado

$$x\sin x = x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^5)$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4)$$

$$e^{x\sin x} = 1 + \left(x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^5)\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^5)\right)^2 + \underbrace{\frac{1}{3!}\left(x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^5)\right)^3 + \dots}$$

Osservo che ha termini tutti di grado ≥ 6, allora da qui in poi trascuro, saranno tutti inglobati in $o(\dots)$

$$= 1 + x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^5) +$$

$$+\frac{1}{2}\Big(x^4 + \overset{\displaystyle \boxed{\text{termini di grado} > 4 \text{ ottenuti da doppi prodotti e quadrati degli altri addendi}}}{o(x^4)}\Big) + \underbrace{o(x^4)}_{\text{contiene tutti i termini del cubo, ecc, trascurati qui}}$$

$$= 1 + x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$

il numeratore diventa:

$$1+x^2-e^{x\sin x}+\log\left(1+\frac{4}{3}x^4\right) =$$

$$= \cancel{1}+\cancel{x^2}-\left(\cancel{1}+\cancel{x^2}-\frac{x^4}{6}+\frac{1}{2}x^4+o(x^4)\right)+\frac{4}{3}x^4+o(x^4) =$$

$$= x^4\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}\right)+o(x^4) = \frac{\cancel{6}}{\cancel{6}}x^4+o(x^4)$$

Denominatore: anche al denom devo garantire con esattezza tutti i termini di grado fino al quattro.

Poiché ho un fattore x^2 davanti alla parentesi [ ], posso limitare lo sviluppo di e^x ed e^{2x} fino al grado 2

$$\Rightarrow \left[e^x-\frac{1}{2}\left(1+e^{2x}\right)\right] = \left[1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-\frac{1}{2}\left(1+1+(2x)+\frac{1}{2}(2x)^2+o(x^2)\right)\right] =$$

$$= \cancel{1}+\cancel{x}+\frac{1}{2}x^2-\cancel{1}-\cancel{x}-x^2+o(x^2) = -\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

il limite dato diventa $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^4+o(x^4)}{4x^2\left(-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)} =$

$$= -\frac{1}{2}$$