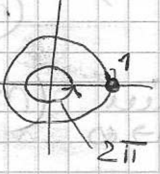
2) ? soluzioni di $\left(\frac{1}{4}z^2+|e^{i2\pi}|\right)\left(z^3+8i\right)=0$

Un prodotto è nullo se almeno uno dei suoi fattori è nullo, quindi uguagliamo a zero i singoli fattori.

- $\frac{1}{4}z^2+\underbrace{|e^{i2\pi}|}_{1}=0$ $\qquad \underset{\uparrow \atop \text{modulo}}{1}\cdot e^{i2\pi}=1$



$z^2+4=0 \qquad z^2+4=(z+2i)(z-2i)=0$

$z_{1,2}=\pm 2i$

- $z^3+8i=0 \qquad z^3=-8i=8(-i)=8e^{-i\pi/2}$

$\rho=8 \quad \theta=-\frac{\pi}{2}$

le radici complesse sono: $\sqrt[3]{\rho}=2 \qquad \varphi_k=\frac{\theta+2\pi k}{3}$

$z_0=\sqrt[3]{\rho}\,e^{i\varphi_0}=2e^{-i\pi/6}=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)$

$z_1=\sqrt[3]{\rho}\,e^{i\varphi_1}=2e^{i\pi/2}=2i$

$z_2=\sqrt[3]{\rho}\,e^{i\varphi_2}=2e^{i\frac{7}{6}\pi}=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)$

$\varphi_0=-\frac{\pi}{6}$

$\varphi_1=\frac{\pi}{2}$

$\varphi_2=\frac{7}{6}\pi$

le radici finali sono:

$z_0=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right),\ z_1=2i$ contata 2 volte, $z_2=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right),\ z_3=-2i$

---

3) sia $\alpha\in\mathbb{R}^+$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\sin\frac{\pi n^2}{n^2+7}\right)(n+1)^2}{(n!+1)\left(e^{3/(n+1)!}-1\right)\sqrt{n^{(2+2\sqrt{2})\alpha}+7\sin(n^n)}}=(*)$$

per $n\to+\infty$ $\quad \sin\frac{\pi n^2}{n^2+7}\longrightarrow\sin\pi=0$

per $n\to+\infty$ $\quad \left(e^{3/(n+1)!}-1\right)\sim\frac{3}{(n+1)!}$ $\quad$ poiché $e^x-1\sim x$ per $x\to 0$

poiché $\alpha>0$ sotto radice prevale $n^{(2+2\sqrt{2})\alpha}\to+\infty$, mentre $7\sin(n^n)$ è limitata. $\qquad$ e $x=\frac{3}{(n+1)!}\to 0$ per $n\to\infty$

Il limite diventa:

(6)

$$(*) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(n!+1)\frac{3}{(n+1)!}\cdot\sqrt{n^{2(1+\sqrt{2})\alpha}}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{\cancel{n!}\,\frac{3}{(n+1)\cancel{n!}}\cdot n^{(1+\sqrt{2})\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(n+1)^{3-(1+\sqrt{2})\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } 3-(1+\sqrt{2})\alpha>0 \quad \alpha<\frac{3}{1+\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & \text{se } 3-(1+\sqrt{2})\alpha=0 \quad \alpha=\frac{3}{1+\sqrt{2}} \\ 0 & \text{se } 3-(1+\sqrt{2})\alpha<0 \quad \alpha>\frac{3}{1+\sqrt{2}} \end{cases}$$

---

4) $$\underbrace{\sum_{n=7}^{+\infty} \frac{n^2+n!+\cos(n^n)}{(n+1)^n+2^n}}_{a_n}$$

La serie data è a termini positivi, infatti:
al numeratore $-1\le\cos(n^n)\le 1$, ma per $n\ge 7$ $n^2+n!\ge 0>-1$

$\Rightarrow n^2+n!+\cos(n^n)>0$,

al denom. ho solo addendi positivi.

Cerco di semplificare l'espressione della serie, o meglio, cerco una serie più semplice che si comporti come $\sum a_n$ per il criterio del confronto asintotico.

$$a_n = \frac{n^2+n!+\cos(n^n)}{(n+1)^n+2^n} \underset{\text{per } n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{(n+1)^n} = b_n$$ (prevalgono gli ordini di ∞ maggiori)

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = l \ne 0$ e $l\in\mathbb{R}$

e per il criterio del conf. asintotico

$\sum a_n$ conv $\Leftrightarrow$ $\sum b_n$ conv.

Ora $\sum b_n$ è + semplice e per studiare il suo carattere utilizzo il criterio del rapporto.

Calcolo $\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+2)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^n}{n!} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+2)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} =$

sostituzione: $m = n+1$

per $n\to\infty \Rightarrow m\to\infty$

$= \lim_{m\to\infty} \left(\frac{m}{m+1}\right)^m =$

$= \lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{\frac{m+1}{m}}\right)^m = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{m}}\right)^m =$

$= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m} = \frac{1}{e} < 1$

Poiché $\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} < 1$, per il criterio del rapporto,

Σb_n converge. Di conseguenza, per il criterio del confr. asintotico converge anche Σa_n.

(l'es 5) è alla fine

6) Discutere la continuità di

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\left(e^{\frac{\sin x}{x}-1}-1\right)(1+x)^{1/x}}{\alpha \operatorname{arctg}(x^2)} & x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

in $x=0$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

~~Devo verificare che~~ f è continua in $x=0$ se $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

Calcolo $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(e^{\frac{\sin x}{x}-1}-1\right)(1+x)^{1/x}}{\alpha \operatorname{arctg}(x^2)} = \frac{0}{0}$

però: so che $e^{\frac{\sin x}{x}-1} - 1 \sim \left(\frac{\sin x}{x} - 1\right)$ per $x\to 0$

perchè per $x\to 0$ $\frac{\sin x}{x} - 1 \to 0$

so che $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$

so che $\operatorname{arctg}(x^2) \sim x^2$ per $x\to 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\frac{\sin x}{x} - 1\right) \cdot e}{\alpha x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\frac{x - x^3/6 + o(x^3)}{x} - 1\right) e}{\alpha x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\cancel{1} - \frac{x^2}{6} + o(x^2) - \cancel{1}\right) e}{\alpha x^2} =$$

$$= -\frac{1}{6\alpha}$$

ora uso Taylor per $\sin x$, se usassi solo il limite fondamentale $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ avrei ancora una forma indet.

Per non avere f. indet. devo appx $\sin(x)$ con $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

Con analoghi conti (= perché tutti i limiti svolti non cambiano se $x \to 0^-$ invece che se 0^+)

abbiamo $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{1}{6\alpha}$

Allora: f è cont in $x=0$ se $-\frac{1}{6\alpha} = f(0) = 1$

cioè se $\alpha = -\frac{1}{6}$.

Se invece $\alpha \neq -\frac{1}{6} \Rightarrow \underbrace{\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)}_{\text{sono finiti}} \neq f(0)$

cioè $x=0$ è punto di disc. eliminabile.

---

7) ? primitiva F di $f(x) = \frac{e^x}{(2+e^x)(1+2e^{-x})}$:

$\lim_{x\to -\infty} F(x) = \log 2$

Calcolo $\int f(x)\,dx = \int \frac{e^x}{(2+e^x)(1+2e^{-x})}\,dx = \int \frac{e^x}{(2+e^x)\,e^{-x}(e^x+2)}\,dx$

ho raccolto e^{-x} nel 2° fattore

$$= \int \frac{e^x \cdot e^x}{(e^x+2)^2}\,dx =$$

sostit: $t = e^x$

$dt = e^x dx$

$$= \int \frac{t}{(t+2)^2}\,dt =$$