Svolgimento appello di analisi 1 (1)
del 14/01/2016
Allievi INFLT_ETELT _ (PAOLA GERVASIO)

1) $f(x) = \sqrt{|x|}\, e^{1-x/2}$

dom $f = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

simmetrie: calcolo $f(-x) = \sqrt{|-x|}\, e^{1-(-x)/2} =$

$= \sqrt{|x|}\, e^{1+x/2} \neq f(x) \Rightarrow f$ non è pari.

$f(-x)$ è anche $\neq$ da $-f(x) \Rightarrow f$ non è dispari

f non presenta simmetrie notevoli.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\sqrt{|x|}}_{\downarrow\, +\infty}\, \underbrace{e^{1-x/2}}_{\downarrow\, +\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\sqrt{|x|}}_{\downarrow\, +\infty}\, \underbrace{e^{1-x/2}}_{\downarrow\, 0} = \text{Forma indet}$$

posso concludere che il limite è zero perché il comportamento dell'esponenziale vince su quello di $\sqrt{|x|}$, ma lo verifico comunque, calcolando con de l'Hopital.

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{|x|}\, e^{1-x/2} = e \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{\sqrt{x}}^{\tilde f}}{\underbrace{e^{x/2}}_{\tilde g}} \underset{(H)}{=} e\cdot\lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\tilde f' \to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{2}e^{x/2}}}_{\tilde g' \to 0} = e\cdot 0\cdot 0 = 0$$

$$\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{\tilde f'(x)}{\tilde g'(x)} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\tilde f(x)}{\tilde g(x)} = 0$$

$\Rightarrow y=0$ è as. oriz destro.

Potrebbe esistere asintoto obliquo per $x\to-\infty$, ma ~~[illegible]~~ un'analisi più attenta ci porta ad escludere la presenza di as obl per $x\to-\infty$, perché quando $x\to-\infty$ f ~~tende~~ ad assumere un andamento esponenziale, nel prodotto $\sqrt{|x|}\, e^{1-x/2}$ prevale il fattore $e^{1-x/2} \to +\infty$ più velocemente di $\sqrt{|x|}$.

Possiamo verificare che $\nexists$ as. obl sinistro calcolando

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{|x|}\, e^{1-x/2}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{|x|}}{x}}_{\downarrow\, 0} \cdot \underbrace{e^{1-x/2}}_{\downarrow\, +\infty}$$

ancora una volta il comportamento dell'exp prevale. Si può ripetere de l'Hopital riscrivendo opportunamente come forma $\frac{\infty}{\infty}$.

$$= +\infty$$

m non è finito

$\Rightarrow \nexists$ as del sinistro

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{|x|}}{x} e^{1-x/2} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\sqrt{|x|}}{-|x|} \cdot e \cdot e^{-x/2} \right) =$$

per $x \to -\infty$ $|x| = -x \Rightarrow x = -|x|$

$$= -e \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x/2}}{\sqrt{|x|}} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{(H)}{=} -e \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{-\frac{1}{2} e^{-x/2}}{\frac{1}{2\sqrt{|x|}} \cdot \underbrace{\frac{|x|}{x}}_{=-1\ (\text{per } x<0)}} = -e \cdot (-\infty) = +\infty$$

Calcolo $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{|x|}} \cdot \frac{|x|}{x} \cdot e^{1-x/2} + \sqrt{|x|} \cdot e^{1-x/2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{|x|}}{x} e^{1-x/2} - \frac{1}{2} \sqrt{|x|}\, e^{1-x/2} = \frac{1}{2} \sqrt{|x|}\, e^{1-x/2} \left(\frac{1}{x} - 1\right)$$

$\operatorname{dom} f' = \{x \in \operatorname{dom} f : x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$\Rightarrow x = 0 \in \operatorname{dom} f$ ma $\notin \operatorname{dom} f'$ ed è un punto di non derivabilità.

Dobbiamo capire che tipo di punto di non derivabilità è, quindi calcoliamo $f'_+(0)$ e $f'_-(0)$

Dalla def di ~~exp~~ f'_+ e f'_- abbiamo

$$f'_+(0) = \lim_{x\to0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{|x|} \cdot e^{1-x/2} - 0}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} e^{1-x/2} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{1-x/2} = \frac{e}{0^+} = +\infty$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{|x|}\,e^{1-x/2}-0}{x-0} =$$

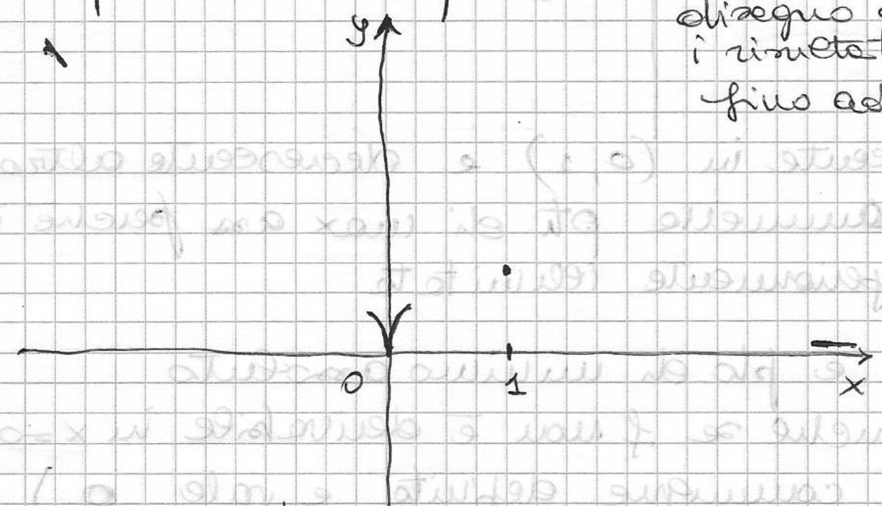
$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{|x|}}{-|x|}\, e^{1-x/2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{-\sqrt{|x|}}\cdot e^{1-x/2} = \frac{1}{-0^+}\cdot e = \frac{e}{0^-} = -\infty$$

(come prima ho $x=-|x|$ perché $x<0$)

Quindi $f'_+(0)=+\infty$, $f'_-(0)=-\infty$

e $x=0$ è punto di cuspide.

Abbozzo il disegno con i risultati trovati fino ad ora



Discuto crescenza e decrescenza

$f'(x)\geq 0$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{|x|}\,e^{1-x/2}\left(\frac{1}{x}-1\right) \geq 0$$

F1. $\sqrt{|x|}\geq 0 \quad \forall x\in \operatorname{dom} f$

$\sqrt{|x|}=0$ per $x=0$, ma $x=0$ è punto di non derivabilità.

F2. $e^{1-x/2}>0 \quad \forall x\in \operatorname{dom} f$

F3. $\left(\frac{1}{x}-1\right)\geq 0 \iff \frac{1-x}{x}\geq 0 \iff 0<x\leq 1$

		0		1	
F1	+	0	+		+
F2	+		+		+
F3	−	$\ast$	+	0	−
f'	−		+	0	−
f	↘		↗		↘

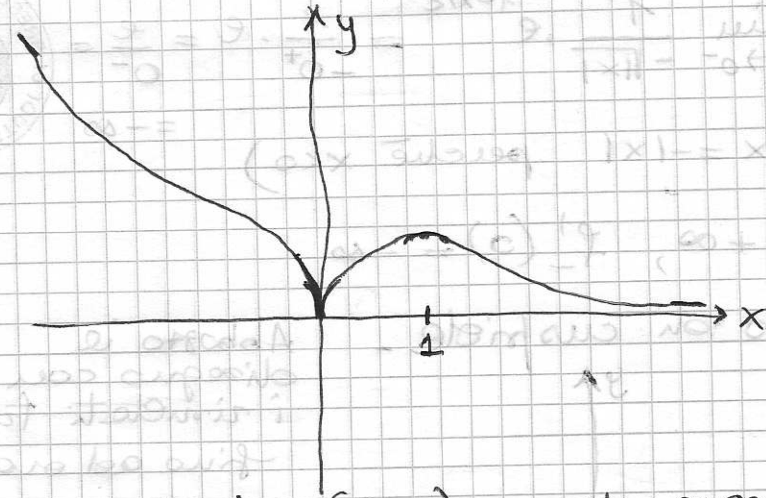
$\Downarrow$

$f'(x)\geq 0 \iff 0<x\leq 1$

$x=0$ è pto di min relativo

$x=1$ è pto di max rel stazionario (lì f' è definita ed è nulla)

Posso completare il disegno con le nuove informazioni



f è crescente in $(0,1)$ e decrescente altrove

f non ammette pti di max ass perché è superiormente illimitata

$x=0$ è pto di minimo assoluto
(anche se f non è derivabile in $x=0$, lì è comunque definita e vale 0)

Flessi: ne esisterà sicuramente uno nell'intervallo $(1,+\infty)$ perché in un pto di max rel stazionario la funzione è concava, mentre la presenza dell'asintoto destro e il fatto che f sia decrescente comporta che f sia convessa quando $x \to +\infty$.

Esiste almeno un pto di flesso anche in $(-\infty, 0)$ in quanto, quando $x \to -\infty$, f tende a comportarsi come $e^{-x/2}$ (l'abbiamo visto anche nel calcolo dei precedenti limiti) e la funz $e^{-x/2}$ è convessa; mentre per $x \to 0^-$ la funzione è concava, ce lo dice il valore di f'_-.