4) $$\lim_{x\to 1^+} \frac{\left(\log^3 x - (x-1)^3\right) x^{\frac{8}{x-1}}}{(e^x - e)\sinh^3(x-1)} =$$ ⑥

faccio subito la sostituzione $t = x-1$

se $x \to 1^+ \Rightarrow t \to 0^+$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\left(\log^3(t+1) - t^3\right)(t+1)^{\frac{8}{t}}}{(e^{t+1} - e)\sinh^3 t} =$$

$\log(1+t) \simeq t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\left(\left(t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)^3 - t^3\right)\cdot\left(\left(t+1\right)^{1/t}\right)^8}{e\,\underbrace{(e^t - 1)}_{\sim t}\cdot\left(t^3 + o(t^4)\right)} =$$

(posso utilizzare il limite notevole senza pericolo di perdere contributi perché ci sono prodotti e non somme)

ricordo che $\lim_{t\to 0^+} (1+t)^{1/t} = e$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\left(\left(t^3 - \frac{t^6}{8} + 3t^2\left(-\frac{t^2}{2}\right) + 3t\cdot\left(-\frac{t^2}{2}\right)^2 + o(t^4)\right) - t^3\right)e^8}{e\cdot t\,\left(t^3 + o(t^4)\right)} =$$

$$= e^7 \cdot \lim_{t\to 0^+} \frac{\left(-\frac{3}{2}t^4 + o(t^4)\right)}{\left(t^4 + o(t^5)\right)} = -\frac{3}{2}e^7$$

<u>OSS:</u> calcolo di $\left(t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)^3$:

$$\left(t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)^3 = \left[\left(t - \frac{t^2}{2}\right) + o(t^2)\right]^3 = \left(t - \frac{t^2}{2}\right)^3 + \left(o(t^2)\right)^3 + \underbrace{3\left(t - \frac{t^2}{2}\right)^2 o(t^2)}_{} +$$

$$+ \underbrace{3\left(t - \frac{t^2}{2}\right)\cdot\left(o(t^2)\right)^2}_{} = \underbrace{t^3 - \frac{t^6}{8} + 3t^2\left(-\frac{t^2}{2}\right) + 3t\left(-\frac{t^2}{2}\right)^2}_{\text{cubo del 1° binomio}} + o(t^6) + o(t^4)$$

$$+ \; o(t^5) = t^3 - \frac{3}{2}t^4 + o(t^4)$$

Ricordo che $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$.

5) Data $f:]0,2[\to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} (x-1) \log(|\sin(x-1)|) + \sqrt[3]{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

studiare la derivabilità in $x = 1$.

Devo calcolare $f'_+(1)$ e $f'_-(1)$, le calcolo secondo la definizione, come limiti del rapporto incrementale

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)\log(|\sin(x-1)|) + \sqrt[3]{x-1}}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \Big[\underbrace{\log(|\sin(x-1)|)}_{\downarrow \atop -\infty} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}}_{\downarrow \atop +\infty} \Big] =$$

$\Rightarrow$ forma indet.

faccio denom. comune

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)^{2/3} \cdot \log(|\sin(x-1)|) + 1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} =$$

se $x \to 1$
$\Rightarrow \sin(x-1) \sim (x-1)$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{\overbrace{(x-1)^{2/3} \log(|x-1|)}^{\to 0} + 1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = +\infty$$

$\lim_{x \to 1^-} (x-1)^{2/3} \log(|x-1|) = 0$ per il $\lim_{x \to 0} x^\alpha \cdot \log x^\beta = 0$
$\forall \alpha, \beta > 0$.

$f'_+(1) = \ldots$ ragionando allo stesso modo $= +\infty$

$\Rightarrow$ le due derivate sono infinite con lo stesso segno e $x = 1$ è pto di non derivabilità a tg verticale

6) sia $\alpha \geq 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1+x^\alpha}{(1-e^{-x})^\alpha (x^8+1)}\,dx$$

$$f(x) = \frac{1+x^\alpha}{(1-e^{-x})^\alpha (x^8+1)} \longrightarrow +\infty \quad \text{per } x \to 0^+$$

allora devo spezzare l'$\int$ dato in 2 e studiarli separatamente

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \underset{(A)}{\int_0^a f(x)\,dx} + \underset{(B)}{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx} \quad \text{con } a > 0$$

L'integrale dato converge solo se convergono contemporaneamente (A) e (B).

(A) $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a \frac{1+x^\alpha}{(1-e^{-x})^\alpha (x^8+1)}\,dx = \odot$ devo cercare una funzione asintotica a $f(x)$ per $x \to 0$

per $x \to 0$ $\quad 1+x^\alpha \sim 1$

$x^8+1 \sim 1$

$(1-e^{-x})^\alpha \sim x^\alpha$ in fatti: $(1-e^{-x})^\alpha = \left[-(e^{-x}-1)\right]^\alpha \sim$

$\sim \left[-(-x)\right]^\alpha = x^\alpha$

$\displaystyle\odot \sim \int_0^a \frac{1}{x^\alpha \cdot 1}\,dx$ che converge se $\boxed{\alpha < 1}$ (A)

(B) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} \frac{1+x^\alpha}{(1-e^{-x})^\alpha (x^8+1)} = \ominus$ anche qui cerco una funz asintotica a $f(x)$ per $x \to +\infty$.

per $x \to +\infty$ $\quad 1+x^\alpha \sim x^\alpha$

$x^8+1 \sim x^8$

$(1-e^{-x})^\alpha \sim 1$ perché $e^{-x} \to 0$ per $x \to +\infty$

$\displaystyle\ominus \sim \int_a^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x^8}\,dx = \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^{8-\alpha}}\,dx$ che conv se $8-\alpha > 1$

cioè $\boxed{\alpha < 7}$ (B)

L'integrale dato conv se $\begin{cases} \alpha < 1 \\ \alpha < 7 \end{cases}$ contemporan. $\Rightarrow$ per $\alpha < 1$ //.

7) $$\int_{-7}^{-6} \frac{\sqrt{x+8}}{x+8+\sqrt{x+8}}\,dx =$$

sostituzione: $t = \sqrt{x+8}$

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{x+8}}\,dx = \frac{1}{2t}\,dx \Rightarrow 2t\,dt = dx$$

se $x=-7 \Rightarrow t=1$

se $x=-6 \Rightarrow t=\sqrt{2}$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t}{\underbrace{t^2+t}_{t(t+1)}}\,2t\,dt = 2\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t}{t+1}\,dt = 2\left[\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t+1-1}{t+1}\,dt\right] =$$

$$= 2\left[\int_1^{\sqrt{2}} 1\,dt - \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t+1}\right] = 2\left[t - \log(t+1)\right]_1^{\sqrt{2}} =$$

$$= 2\left(\sqrt{2} - 1 - \log\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$$

---

8) $$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 2e^x \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

eq omog associata: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \quad \lambda_{1,2} = 2$

$$\Rightarrow y_0(x, c_1, c_2) = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$$

$f(x) = 2e^x \Rightarrow n=0 \quad \alpha=1 \quad \beta=0 \Rightarrow \alpha+i\beta=1$ non è sol dell'omog. $\Rightarrow m=0$

$$y_p(x) = x^m e^{\alpha x}\left(q_1(x)\cos(\beta x) + q_2(x)\sin(\beta x)\right)$$

q_1 e q_2 sono costanti (polinomi di grado $n=0$)

$$= x^0 \cdot e^x\left(q_1 \underbrace{\cos(0x)}_{1} + 0\right) = q_1 e^x$$

$y_p' = q_1 e^x \quad y_p'' = q_1 e^x \Rightarrow q_1 e^x - 4q_1 e^x + 4q_1 e^x = 2e^x \Rightarrow q_1 = 2$

$$\Rightarrow \quad y(x;c_1,c_2) = y_0(x;c_1,c_2) + y_p(x) =$$

$$= (c_1 + c_2 x)\, e^{2x} + 2e^x$$

$$y(0) = c_1 + 2 = 2 \Rightarrow c_1 = 0 \quad \Rightarrow y(x;c_1c_2) = c_2 x e^{2x} + 2e^x$$

$$y'(x;\underset{0}{\underset{\shortparallel}{c_1}},c_2) = c_2 e^{2x} + c_2 x \cdot 2e^{2x} + 2e^x$$

$$y'(0) = c_2 + 2 = 4 \Rightarrow c_2 = 2$$

$$e \quad \boxed{y(x) = 2xe^{2x} + 2e^x}$$