Svolgimento dell' appello di ANALISI 1

del 4 febbraio 2016

1) Studiare $f(x) = x\, e^{2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{x}\right)}$

dom f : $x \neq 0$ $\Rightarrow$ dom $f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

simmetrie: valuto $f(-x) = -x \cdot e^{2\,\mathrm{arctg}\left(-\frac{2}{x}\right)} = -x\, e^{-2\,\mathrm{arctg}(2/x)}$

poiché l'arctg è dispari

Abbiamo che $f(-x) \neq f(x)$, cioè f non è pari

e $f(-x) \neq -f(x)$ cioè f non è dispari

$\Rightarrow$ f non presenta simmetrie.

limiti: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x\, \underbrace{e^{2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{x}\right)}}_{\downarrow\, 1} = -\infty$

$$\boxed{x \to \pm\infty \Rightarrow \frac{2}{x} \to 0 \Rightarrow \mathrm{arctg}\left(\frac{2}{x}\right) \to 0 \Rightarrow e^{2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{x}\right)} \to e^0 = 1}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\, \underbrace{e^{2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{x}\right)}}_{\downarrow\, 1} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x\, e^{2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{x}\right)} = \lim\limits_{x \to 0^+} x \cdot e^{\pi} = 0$

$$\boxed{x \to 0^+ \Rightarrow \frac{2}{x} \to +\infty \Rightarrow \mathrm{arctg}\left(\frac{2}{x}\right) \to +\frac{\pi}{2}}$$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x\, \underbrace{e^{2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{x}\right)}}_{\downarrow\, e^{-\pi}} = 0$ $\longrightarrow$ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$

$$\boxed{x \to 0^- \Rightarrow \frac{2}{x} \to -\infty \Rightarrow \mathrm{arctg}\left(\frac{2}{x}\right) \to -\frac{\pi}{2}}$$

f non può essere continua in $x=0$ perché non è definita in $x=0$.

$\nexists$ asintoto verticale per $x \to 0$.

Asintoti obliqui:

per $x \to +\infty$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{2\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x}\right)} = 1$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x e^{2\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x}\right)} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x \cdot \left(e^{2\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x}\right)} - 1\right) = (*)$$

per $x \to +\infty \Rightarrow 2\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x}\right) \to 0$

$$\Rightarrow e^{2\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x}\right)} - 1 \sim 2\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x}\right)$$

inoltre, poiché $\frac{2}{x} \to 0$ (poiché $x \to +\infty$)

abbiamo che $\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x}\right) \sim \frac{2}{x}$

$$\Rightarrow e^{2\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x}\right)} - 1 \sim 2\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x}\right) \sim 2 \cdot \frac{2}{x} = \frac{4}{x}$$

quando $x \to +\infty$

$$(*) = \lim_{x\to+\infty} x \cdot \frac{4}{x} = 4$$

$\Rightarrow q = 4$ e $y = x + 4$ è as. obliquo destro.

per $x \to -\infty$

si ragiona in modo analogo e si trova

$y = x + 4$ as. obl. sinistro

$\Rightarrow y = x + 4$ è as. obl completo.

$$f'(x) = e^{2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{x}\right)} + x\cdot e^{2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{x}\right)}\cdot \frac{2}{1+\left(\frac{2}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{2}{x^2}\right) = \oplus$$

dom f' = dom f $\Rightarrow$ $\nexists$ pti di non derivab.

riscrivo meglio $f'(x)$:

$$\oplus = e^{2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{x}\right)}\left(1 + x\cdot\frac{2}{\frac{x^2+4}{\cancel{x^2}}}\cdot\left(-\frac{2}{\cancel{x^2}}\right)\right) =$$

$$= e^{2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{x}\right)}\left(1-\frac{4x}{x^2+4}\right) = e^{2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{x}\right)}\,\frac{(x-2)^2}{x^2+4}.$$

$f'(x) \geq 0$: $\quad \underbrace{e^{2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{x}\right)}}_{>0\ \forall x\in \mathrm{dom} f}\;\frac{(x-2)^2}{\underbrace{(x^2+4)}_{>0\ \forall x\in\mathbb{R}}} \geq 0$

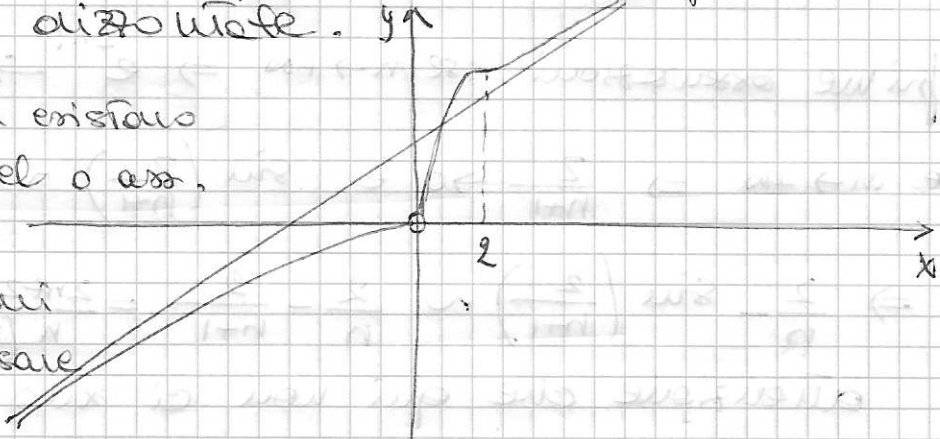
Allora $f'(x)\geq 0 \iff (x-2)^2\geq 0$ vero $\forall x\in\mathbb{R}$

		0	
f'	$+$		$+$
f	$\nearrow$		$\nearrow$

f è sempre crescente.

$(x-2)^2 = 0$ quando $x = 2$.

$x=2$ è pto stazionario, ma non è di massimo né di minimo, quindi sarà un pto di flesso a tangente orizzontale.



f è illimitata e non esistono punti di max/min, rel o ass. Dal grafico non emergono indicazioni che facciano pensare ad altri flessi.

2) ? luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$:

$$|z(2+i)|^2 + 2(\operatorname{Im} z)^2 = (z^2 + \bar{z}^2) + 3$$

pongo $z = x+iy \Rightarrow \bar{z} = x-iy$ e $\operatorname{Im} z = y$ (ricordo che $\operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$)

l'eqz diventa:

$$|(x+iy)(2+i)|^2 + 2y^2 = \underset{x^2+(iy)^2+2x\cdot(iy)}{(x+iy)^2} + (x-iy)^2 + 3$$

$$|2x+2iy+xi-y|^2 + 2y^2 = x^2-y^2+\cancel{2xyi}+x^2-y^2-\cancel{2xyi}+3$$

$$|(2x-y)+i(2y+x)|^2 + 2y^2 = 2x^2-2y^2+3$$

ricordo che $|w|^2 = (\operatorname{Re} w)^2 + (\operatorname{Im} w)^2$

$$(2x-y)^2 + (2y+x)^2 + 2y^2 = 2x^2-2y^2+3$$

$$4x^2+y^2-\cancel{4xy}+4y^2+x^2+\cancel{4xy}+2y^2 = 2x^2-2y^2+3$$

$$3x^2+9y^2 = 3 \quad \rightarrow \quad x^2+3y^2 = 1$$

questa è l'eqz di un'ellisse

(Si ricorda che l'eqz di una circonferenza presenta coefficienti uguali per x^2 e y^2 !!)

---

3) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{n+3}(1+e^{-n!})\left(\frac{2}{n}-\sin\left(\frac{2}{n+1}\right)\right)^2}{(n+1)^{n-1}+\cos(n^n)} = ⓧ$$

prime osservazioni: se $n\to+\infty \Rightarrow e^{-n!}\to 0 \Rightarrow (1+e^{-n!}) \to 1$

se $n\to+\infty \Rightarrow \frac{2}{n+1}\to 0$ e $\sin\left(\frac{2}{n+1}\right) \sim \frac{2}{n+1}$

$$\Rightarrow \frac{2}{n}-\sin\left(\frac{2}{n+1}\right) \sim \frac{2}{n}-\frac{2}{n+1} = \frac{2n+2-2n}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)}$$

attenzione che qui non ci sono cancellazioni;

Al denominatore prevale $(n+1)^{n-1}$.

$$(\times) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n \cdot n^3 \left(\frac{2}{n(n+1)}\right)^2}{(n+1)^n (n+1)^{-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{n^{\cancel{3}} \cdot 4}{\cancel{n^2}(n+1)^2(n+1)^{-1}} = 4 \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n}_{*} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}}$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{e} \cdot 1 = \frac{4}{e}$$

ERRORI MOLTO COMUNI:

1) dire che $n^{n+3} \sim n^n$ per $n \to \infty$ (Questo non è vero)

Quando scriviamo che $a_n \sim b_n$ per $n\to\infty$ stiamo intendendo che a_n e b_n si comportano allo stesso modo per $n\to\infty$, cioè che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Non è vero che $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+3}}{n^n}$ è uguale a 1 !!

È invece vero che $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+3}}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^n} \cdot n^3}{\cancel{n^n}} = \lim_{n\to\infty} n^3 = +\infty$!!

Più in generale, diciamo che $a_n \sim l b_n$ per $n\to\infty$ se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ (con $l \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$)

2) Dire che $(n+1)^n \sim n^n$ per $n\to\infty$ (pure questo è falso)

Infatti sappiamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

Allora si ha che $(n+1)^n \sim e \cdot n^n$ per $n\to\infty$

questo è vero

CONSIGLIO: tenere le basi delle potenze così come sono fino a quando posso confrontare tutti i termini che compaiono. Solo alla fine fare le semplificazioni (come nel limite all'inizio di questa pagina).