Analisi Matematica 1 - Appello 1 luglio 2016 (1

1 - $f(x) = \exp\left(|\log x| - \dfrac{1}{3x}\right)$

dom $f = \mathbb{R}^+$, infatti dobbiamo chiedere $x>0$ per il log e $x \neq 0$ per il den.

Simmetrie: non esistono perché il dom non è simmetrico rispetto allo zero.

Limiti agli estremi del dominio: $x \to 0^+$ e $x \to +\infty$

- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{\left(\underbrace{|\log x|}_{\downarrow +\infty} - \underbrace{\frac{1}{3x}}_{\downarrow +\infty}\right)} =$ ho forma indet.

$= \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{3x|\log x| - 1}{3x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{3x}}$ sappiamo che $\lim_{x\to 0^+} x \log x = 0$

$= 0$, quindi non esistono asintoti verticali

- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{\underbrace{|\log x|}_{\downarrow +\infty} - \underbrace{\frac{1}{3x}}_{\downarrow 0}} = +\infty$ cerco as. obl per $x \to +\infty$.

- $m = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{|\log x| - \frac{1}{3x}}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\overbrace{e^{\log x}}^{x} \cdot e^{-1/3x}}{x} =$

(se $x \to +\infty \Rightarrow |\log x| = \log x$)

$= \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{x}\, e^{-1/(3x)}}{\cancel{x}} = e^0 = 1$

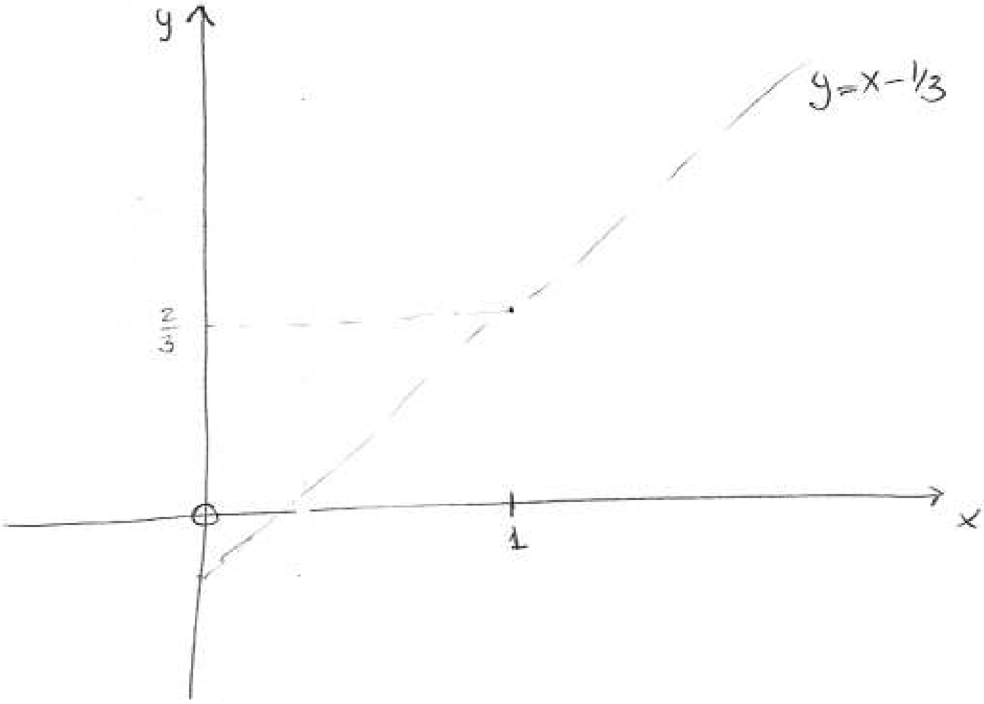
- $q = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty}\left(x e^{-1/(3x)} - x\right) =$

$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{\downarrow +\infty} \underbrace{\left(e^{-\frac{1}{3x}} - 1\right)}_{\downarrow 0} = \lim_{x\to+\infty} x \cdot \left(-\dfrac{1}{3x}\right) = -\dfrac{1}{3}$

F. indet, ma $-\dfrac{1}{3x} \to 0 \Rightarrow$

$e^{-1/3x} - 1 \sim -\dfrac{1}{3x}$ per $x \to +\infty$

$\Rightarrow y = x - \dfrac{1}{3}$ è as. obl dx.



- $$f'(x) = e^{|\log x| - \frac{1}{3x}} \cdot \left(\frac{|\log x|}{\log x} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^2} \right)$$

$$\text{dom } f' = \{ \underbrace{x \in \mathbb{R} : x > 0}_{\text{dom } f}, \underbrace{x \neq 1}_{\text{garantisce } \log x \neq 0} \} = (0,1) \cup (1, +\infty)$$

studio il punto di non derivabilità $x = 1$.

$$l^- = \lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} e^{-\log x - \frac{1}{3x}} \left(\frac{-\log x}{\log x} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^2} \right) =$$

(per $x < 1 \Rightarrow \log x < 0 \Rightarrow |\log x| = -\log x$)

$$= \lim_{x \to 1^-} e^{\log \frac{1}{x}} \cdot e^{-\frac{1}{3x}} \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^2} \right) = e^{-1/3} \left(-1 + \frac{1}{3} \right) < 0$$

$$l^+ = \lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} e^{\log x - \frac{1}{3x}} \cdot \left(\frac{\log x}{\log x} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \to 1^+} x \cdot e^{-1/3x} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^2} \right) = e^{-1/3} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \right) > 0$$

$l^- \neq l^+$ entrambi finiti $\Rightarrow l^- = f'_-(1) \neq l^+ = f'_+(1)$

e $x = 1$ è punto angoloso $f(1) = e^{-1/3}$

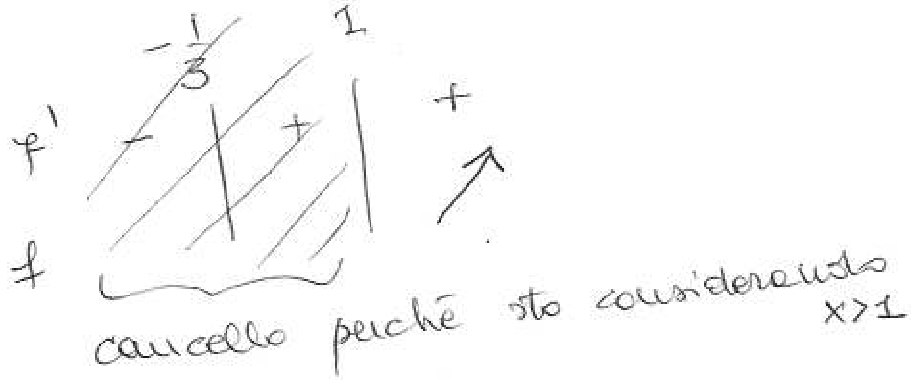
$f'(x) \geq 0$. riscrivo f' spezzando il modulo

$$f'(x) = \begin{cases} e^{\log x - \frac{1}{3x}}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^2}\right) & \text{se } \log x > 0 \iff x > 1 \\ e^{-\log x - \frac{1}{3x}}\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^2}\right) & \text{se } \log x < 0 \iff x < 1 \end{cases}$$

caso $x > 1$

$$f'(x) = \underbrace{e^{\log x - \frac{1}{3x}}}_{>0\ \forall x \in \operatorname{dom}(f)} \cdot \frac{3x+1}{\underbrace{3x^2}_{>0\ \forall x \in \operatorname{dom} f}} \geq 0 \iff 3x+1 \geq 0$$

$$x \geq -\frac{1}{3}$$

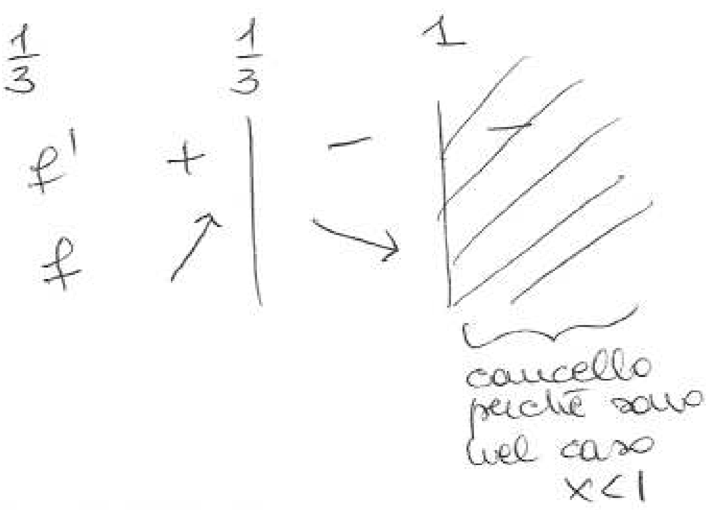


Quindi f è crescente in $(1, +\infty)$.

caso $x < 1$

$$f'(x) = \underbrace{e^{-\log x - \frac{1}{3x}}}_{>0\ \forall x \in \operatorname{dom} f} \cdot \frac{-3x+1}{\underbrace{3x^2}_{>0\ \forall x \in \operatorname{dom} f}} \geq 0$$

$$\iff -3x+1 \geq 0 \iff x \leq \frac{1}{3}$$



$x = \frac{1}{3}$ è pto di max rel stazionario

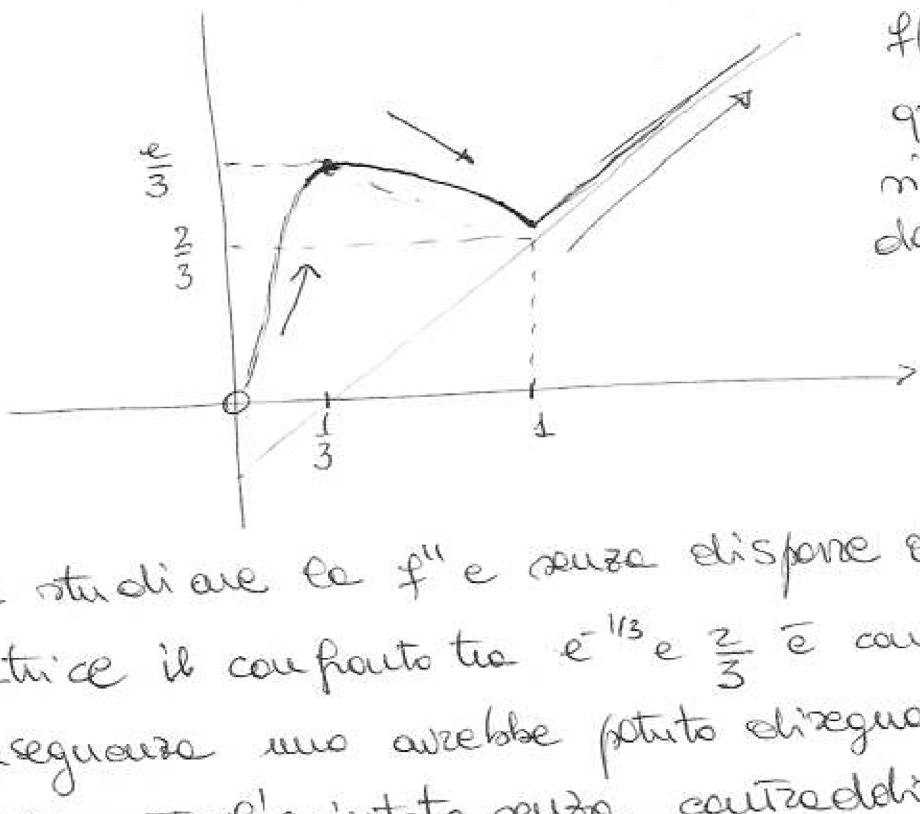
Lo schema completo di f' è:

		$\frac{1}{3}$		1	
f'	$+$		$-$		$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
	preso dal secondo schema				preso dal primo schema

$\Rightarrow$ deduco $x = 1$ pto di min relativo.
Ricordo che $x = 1$ è pto angoloso, quindi non può essere stazionario.

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = e^{\left|\log\frac{1}{3}\right| - 1} = e^{-\log\frac{1}{3} - 1} = e^{\log 3}\cdot e^{-1} = \frac{3}{e} \quad \left(\text{è poco } > 1\right)$$

Posso tracciare il grafico:



$f(1) = e^{-1/3} \sim 0.71 > \frac{2}{3}$
quindi la f si avvicina all'as. dall'alto.

Senza studiare la f'' e senza disporre di una calcolatrice il confronto tra $e^{-1/3}$ e $\frac{2}{3}$ è complicato, di conseguenza uno avrebbe potuto disegnare il punto angoloso sotto l'asintoto senza contraddire quanto trovato fino a questo momento. Il disegno sarebbe stato ritenuto comunque valido ai fini del punteggio.

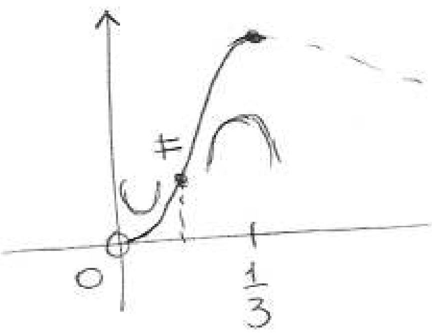
Per poter dedurre informazioni sui flessi, studiamo

$\lim_{x\to 0^+} f'(x)$ per vedere come la f si avvicina a $x_0=0$.

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-\log x - \frac{1}{3x}} \left(\frac{-3x+1}{3x^2}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{3x}} \cdot \frac{-3x+1}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-3x+1}{\underbrace{3x^2}_{\downarrow\, 0}\ \underbrace{e^{1/(3x)}}_{\downarrow\, +\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0 \Rightarrow$$ f si avvicina a zero per $x\to 0$ con tang. orizz.

prevale è ∞ dell'exp.



Quindi, per la presenza in $x=\frac{1}{3}$ di un pto di max rel staz, si avrà un cambio di concavità (e quindi un flesso). Non ci sono altre informazioni che facciano pensare ad altri punti di flesso.

---

2) ? $z\in\mathbb{C}$: $\left|e^{z|z|-2z+i}\right| = 1$

pongo $w = z|z|-2z+i$, $|e^{w}| = e^{Re\, w}$ (def di exp. complesso e relative prop. pag 26 e 27 di cap8.pdf)

Quindi $|e^{w}|=1 \iff e^{Re\, w} = 1$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{Re\, w = 0}$$

Il mio problema è equivalente a ? $z\in\mathbb{C}$: $Re(z|z|-2z+i)=0$

pongo $z = x+iy \Rightarrow w = z|z|-2z+i = (x+iy)\sqrt{x^2+y^2}-2(x+iy)+i$

$$= \underbrace{x\sqrt{x^2+y^2}-2x}_{\mathrm{Re}\,w} + i\left(y\sqrt{x^2+y^2}-2y+1\right)$$

Quindi $\mathrm{Re}\,w=0 \iff x\sqrt{x^2+y^2}-2x=0$

$$x\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)=0$$

$x=0$ (retta) $\cup$ $\sqrt{x^2+y^2}-2=0$

$\Updownarrow$

$x^2+y^2=4$ (crf)

Il luogo cercato è l'unione tra una retta $(x=0)$ e ~~una~~ crf di centro $(0,0)$ e raggio 2.

---

3) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cos(n!)+\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n^2}}{e^{3n}+n^{5\sqrt{7}}+\sin(n^n)}$$

Num: $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ è succ geom con base $q=\frac{1}{2}\in(0,1)$ allora è infinitesima

$\cos(n!)$ è limitata,

$$\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n^2} = e^{n^2\cdot\log\left(1+\frac{3}{n}\right)} \sim e^{n^2\cdot\frac{3}{n}} = e^{3n} \to +\infty$$

Quindi al num prevale l'ultimo addendo.

Den: per il confronto di infiniti tra e^{3n} e $n^{5\sqrt{7}}$ prevale l'esponenziale, mentre $\sin(n^n)$ resta limitata.

Allora il limite dato è uguale a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n^2}}{e^{3n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{n^2\log\left(1+\frac{3}{n}\right)}}{e^{3n}}.$$

Ora, il modo corretto di procedere è:

$$= \lim_{n\to\infty} e^{n^2 \log\left(1+\frac{3}{n}\right) - 3n} = \lim_{n\to\infty} e^{n\left[n \log\left(1+\frac{3}{n}\right) - 3\right]} = (*)$$

Mi accorgo che se usassi il limite fondam

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^n = e^3$, avrei in parentesi quadra:

$$n \log\left(1+\frac{3}{n}\right) - 3 \sim 3 - 3 = 0,$$

~~esterno~~ e $n \to \infty$ fuori dalla parentesi, quindi una forma indeterminata.

Questo vuol dire che usare il lim. fondam è poco accurato, ho cancellazione, quindi devo sviluppare $\log\left(1+\frac{3}{n}\right)$ fino al 2° ordine con Taylor, cioè $\log\left(1+\frac{3}{n}\right) = \frac{3}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ per $n \to \infty$

$$e \left[n \log\left(1+\frac{3}{n}\right) - 3\right] = \left[\cancel{n \cdot \frac{3}{n}} - \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{3}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n}\right) \cancel{- 3}\right] =$$

$$= -\frac{9}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow (*) = \lim_{n\to\infty} e^{n\left(-\frac{9}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{9}{2} + o(1)} =$$

$$= e^{-\frac{9}{2}}.$$

4)
$$f(x)=\begin{cases} 4\int_1^x \frac{\log t}{t}\,dt & \text{se } 1\le x\le e \\ 2+(\alpha-1)(x-e)^{\log(x-e)} & \text{se } e<x\le 2e \end{cases}$$

$\alpha\in\mathbb{R}$, studiare cont di f in $x_0=e$.

Devo calcolare $\ell^-=\lim_{x\to e^-} f(x)$, $\ell^+=\lim_{x\to e^+} f(x)$, $f(e)$

Prima di calcolare questi valori, calcolo $\int_1^x \frac{\log t}{t}\,dt = ⊛$

$$=\left[\frac{1}{2}\log^2 t\right]_1^x=\frac{1}{2}\log^2 x \Rightarrow$$

$$f(x)=\begin{cases} 2\log^2 x & 1\le x\le e \\ 2+(\alpha-1)(x-e)^{\log(x-e)} & e<x\le 2e \end{cases}$$

Basta fare la sost
$y=\log t \Rightarrow dy=\frac{1}{t}dt$
se $t=1 \Rightarrow y=0$
se $t=x \Rightarrow y=\log x$
$$⊛=\int_0^{\log x} y\,dy=\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{\log x}=$$
$$=\frac{1}{2}\log^2 x.$$

$f(e)=2$

poiché il log è una funz cont sul suo dominio, così come pure la funzione quadrato, anche $\log^2 x$ è per la composizione di funzioni continue, continua (da sx in particolare), quindi $\lim_{x\to e^-} f(x)=$

$$=\lim_{x\to e^-} 2\log^2 x = 2e.$$ f è cont da sx indipendentemente da α.

$$\lim_{x\to e^+} f(x)=\lim_{x\to e^+}\left[2+(\alpha-1)(x-e)^{\log(x-e)}\right]$$

Calcolo $$\lim_{x\to e^+}(x-e)^{\log(x-e)} \underset{t=x-e}{=} \lim_{t\to 0^+} t^{\log t} = \lim_{t\to 0^+} e^{\log t\cdot\log t} =$$

$$=\lim_{t\to 0} e^{\overset{\log^2 t}{\downarrow +\infty}} = +\infty.$$

Affinché $\lim_{x\to e^+} f(x)=\lim_{x\to e^-} f(x)=2$ deve risultare
$$\lim_{x\to e^+}(\alpha-1)(x-e)^{\log(x-e)}=0$$

e questo è possibile solo se $\alpha - 1 = 0$, cioè $\alpha = 1$.

Quindi: se $\alpha = 1 \Rightarrow f$ è cont in $x = e$

se $\alpha \neq 1 \Rightarrow f$ è disc in $x = e$ e $x = e$ è pto di infinito

(lim sx finito, lim dx infinito).

---

5) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2}{x^2} + \log\left(\left(\frac{x^3}{x^3+1}\right)^3\right) + \cosh\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{\sin\left(\frac{1+x}{x^2}\right) - \frac{1}{x}} = (+)$$

$$\underbrace{\frac{1+x}{x^2}}_{= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}}$$

Vedo tutti $\frac{1}{x}$

e $x \to +\infty$

allora faccio la sost $t = \frac{1}{x}$

se $x \to +\infty \Rightarrow t \to 0^+$

$$\log\left(\left(\frac{x^3}{x^3+1}\right)^3\right) = 3 \log \frac{1}{1 + \frac{1}{x^3}} = -3\log\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)$$

$$(+) = \lim_{t \to 0} \frac{2t^2 - 3\log(1+t^3) + \cosh(t) - 1}{\sin(t^2+t) - t} \underset{\text{Taylor}}{=}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{2t^2 - 3t^3 + o(t^3) + \cancel{1} + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2) - \cancel{1}}{(t^2+t) + \underbrace{o(t^2+t)}_{= o(t)} - t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{5}{2}t^2 + o(t^2)}{t^2 + \cancel{t} - \cancel{t} + o(t)} = \frac{5}{2}$$

---

6) $$\int_1^2 \frac{x-7}{x(x^2+1)}\,dx = \underbrace{\int_1^2 \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x^2+1)}\,dx}_{\left[\arctg x\right]_1^2} - 7\underbrace{\int_1^2 \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx}_{I_1}$$

$$I_1 = \int_1^2 \frac{dx}{x(x^2+1)} \quad : \quad \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{1}{x(x^2+1)}$$

$$A(x^2+1) + (Bx+C)x = 1$$

$$Ax^2 + Bx^2 + Cx + A = 1 \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \to B=-1 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases}$$

$$I_1 = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \left[\log x\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2x}{x^2+1}dx =$$

$$= \left[\log x\right]_1^2 - \frac{1}{2}\left[\log(x^2+1)\right]_1^2 .$$

Tutto l'integrale è $\left[\operatorname{arctg} x + 7\log x - \frac{7}{2}\log(x^2+1)\right]_1^2 =$

$$= \operatorname{arctg} 2 + 7\log 2 - \frac{7}{2}\log 5 - \underbrace{\operatorname{arctg} 1}_{\frac{\pi}{4}} + 0 - \frac{7}{2}\log 2 = \dots$$

---

7) $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+\alpha^x}{\sinh(x) + 7x^2}dx$ con $\alpha \geq 0$

devo studiare il comportamento della $f(x) = \dfrac{1+\alpha^x}{\sinh(x)+7x^2}$

per $x \to +\infty$.

$\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \sim \dfrac{e^x}{2}$ per $x \to \infty$ e prevale su $7x^2$

quindi al den lascio solo $\dfrac{e^x}{2}$.

Num: se $\boxed{0<\alpha<1}$ $\alpha^x \to 0$ per $x \to \infty$

$\Rightarrow I \sim \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{2}}dx$ che è convergente

se $\alpha = 0$ ho analoga conclusione perché $\alpha^x = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^+$

se $\alpha = 1$ $I \sim \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2}{\frac{e^x}{2}}dx$ ho ancora converg.

Resta il caso $\alpha > 1$ per cui mi devo confrontare con e^x.
perché ora $\alpha^x \to +\infty$ per $x \to \infty \Rightarrow 1+\alpha^x \sim \alpha^x$

ho $(\alpha>1)$ $I \sim \int_1^{\infty} \frac{\alpha^x}{\frac{e^x}{2}} = 2\int_1^{+\infty}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^x = 2\int_1^{+\infty}\frac{1}{\left(\frac{e}{\alpha}\right)^x}$

se $\frac{\alpha}{e}<1$ $\left(o \ \frac{e}{\alpha}>1\right)$ al denominatore ho una funzione esponenziale che $\to\infty$ + veloc di una qualsiasi potenza positiva di x, quindi l'integrale conv.

$(1<\alpha<e \Rightarrow I$ converg$)$.

Se $\frac{\alpha}{e}=1$ la funzione integranda $\left(\frac{\alpha}{e}\right)^x$ è identicam uguale a 1 e l'integr diverge.

Se $\frac{\alpha}{e}>1$ la funz integranda $\left(\frac{\alpha}{e}\right)^x \to +\infty$ e l'integrale diverge.

Conclusione: I converge se $0\leq\alpha<e$.

---

8) $\begin{cases} y''+y=14\sin x \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$ omog: $y''+y=0$, eq. caratt $\lambda^2+1=0$ $\Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm i$

$y_0(x,c_1,c_2)=c_1\cos x+c_2\sin x$

$f(x)=14\sin x = \underbrace{14}_{\text{polinomio di grado } h=0}\cdot e^{\overset{\alpha=0}{0}\cdot x}\cdot\sin(\underset{\beta=1}{1}\cdot x)$ $\Rightarrow \alpha+i\beta=0+i$ è sol dell'eqz caratt con moltepl $m=1$.

Allora la soluz particolare è $y_p(x)=x^m e^{\alpha x}(q_1\cos(\beta x)+q_2\sin(\beta x))=$

$=x\cdot 1\cdot(q_1\cos x+q_2\sin x)$ con q_1,q_2 polinomi di grado $h=0$, cioè cost.

$y_p'(x)=q_1\cos x+q_2\sin x+x(-q_1\sin x+q_2\cos x)$

$y_p''(x)=-q_1\sin x+q_2\cos x+(-q_1\sin x+q_2\cos x)+x(-q_1\cos x-q_2\sin x)$

$y_p''+y_p=14\sin x \Rightarrow -q_1\sin x+q_2\cos x-q_1\sin x+q_2\cos x\cancel{-q_1x\cos x}\cancel{-q_2x\sin x}+$

$+\cancel{xq_1\cos x}+\cancel{q_2x\sin x}=14\sin x$

$\Rightarrow \sin x(-q_1-q_1-14)+\cos x(q_2+q_2)=0 \Rightarrow \begin{cases} q_2=0 \\ q_1=7 \end{cases}$

$y(x)=y_0(x,c_1,c_2)+y_p(x)=c_1\cos x+c_2\sin x-7x\cos x$ $\quad y(0)=c_1=1$

$y'(x)=-\underset{1}{c_1}\sin x+c_2\cos x-7\cos x+7x\sin x$ $\quad y'(0)=c_2-7=0 \Rightarrow c_2=+7$

$y(x)=\cos x+7\sin x-7x\cos x$