ANALISI MATEMATICA 1 - 14 gennaio 2016 - Allievi - INFLT - ETELT - AUTLT - MECMLT

Il NUMERO della FILA è contenuto nel testo dell'esercizio 1 ed è il primo addendo dell'argomento dell'esponenziale.

Fila 1

1. $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$, non ci sono simmetrie.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $y = 0$ asintoto orizzontale destro; f non ammette altri asintoti.

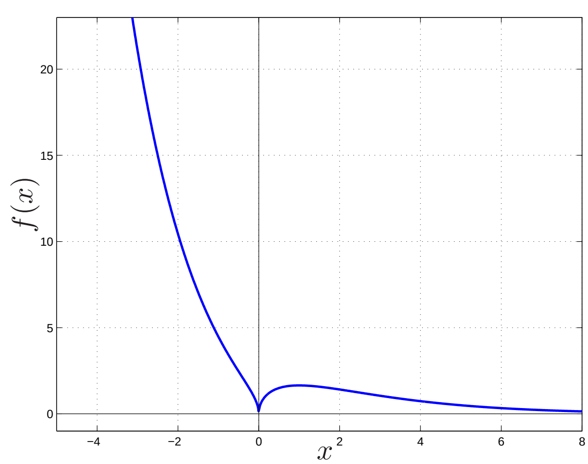
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) e^{1-x/2}, & x > 0 \\ -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{-x}} + \sqrt{-x}\right) e^{1-x/2}, & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{|x|}\, e^{1-x/2}\left(\frac{1}{x} - 1\right).$$

$\mathrm{dom} f' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x = 0$ è punto di cuspide.

f crescente in $]0,1[$, decrescente in $]-\infty,0[$ e in $]1,+\infty[$. $x = 0$ punto di minimo relativo e assoluto (singolare), $x = 1$ punto di massimo relativo stazionario; f è illimitata superiormente.

Abbiamo almeno due punti di flesso, uno in $]-\infty,0[$ e uno in $]1,+\infty[$.
Analisi in $]-\infty,0[$: quando $x \to -\infty$ prevale il comportamento dell'esponenziale $e^{-x/2}$, quindi f è convessa, mentre nell'intorno sinistro del punto di cuspide (punto di minimo) f è concava; essendo f continua e derivabile in $]-\infty,0[$, dovrà esistere almeno un punto di flesso.
Analisi in $]0,+\infty[$: nel punto di massimo relativo $x = 1$, f è concava, mentre quando $x \to +\infty$ la funzione decresce ma ha un asintoto orizzontale, di conseguenza è convessa. Anche qui, essendo f continua e derivabile in $]0,+\infty[$, dovrà esistere almeno un punto di flesso.



2. Le soluzioni sono: $z_0 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$, $z_1 = 2i$, $z_2 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$, $z_3 = -2i$. La soluzione z_1 ha molteplicità 2.

3. $\ell = \frac{1}{3}$ se $\alpha = \frac{3}{1+\sqrt{2}}$, $\ell = 0$ se $\alpha > \frac{3}{1+\sqrt{2}}$, $\ell = +\infty$ se $\alpha < \frac{3}{1+\sqrt{2}}$.

4. La serie converge, si applicano il criterio del confronto asintotico e il criterio del rapporto.

5. $\ell = -\frac{1}{2}$

6. La funzione è continua in $x = 0$ quando $\alpha = -e/6$, altrimenti (per ogni $\alpha \neq 0$) si ha un punto di discontinuità eliminabile.

7. $F(x) = \log(e^x + 2) - \dfrac{e^x}{e^x + 2}$

8. $y(x) = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{2}{x^2}$

Fila 2

1. $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$, non ci sono simmetrie.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $y = 0$ asintoto orizzontale destro; f non ammette altri asintoti.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) e^{2-x/2}, & x > 0 \\ -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{-x}} + \sqrt{-x}\right) e^{2-x/2}, & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{|x|}\, e^{2-x/2}\left(\frac{1}{x} - 1\right).$$

$\mathrm{dom} f' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x = 0$ è punto di cuspide.

f crescente in $]0, 1[$, decrescente in $]-\infty, 0[$ e in $]1, +\infty[$. $x = 0$ punto di minimo relativo e assoluto (singolare), $x = 1$ punto di massimo relativo stazionario; f è illimitata superiormente.

Abbiamo almeno due punti di flesso, uno in $]-\infty, 0[$ e uno in $]1, +\infty[$.
Analisi in $]-\infty, 0[$: quando $x \to -\infty$ prevale il comportamento dell'esponenziale $e^{-x/2}$, quindi f è convessa, mentre nell'intorno sinistro del punto di cuspide (punto di minimo) f è concava; essendo f continua e derivabile in $]-\infty, 0[$, dovrà esistere almeno un punto di flesso.
Analisi in $]0, +\infty[$: nel punto di massimo relativo $x = 1$, f è concava, mentre quando $x \to +\infty$ la funzione decresce ma ha un asintoto orizzontale, di conseguenza è convessa. Anche qui, essendo f continua e derivabile in $]0, +\infty[$, dovrà esistere almeno un punto di flesso.

2. Le soluzioni sono: $z_0 = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$, $z_1 = 3i$, $z_2 = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$, $z_3 = -3i$. La soluzione z_1 ha molteplicità 2.

3. $\ell = \frac{1}{5}$ se $\alpha = \frac{3}{2+\sqrt{2}}$, $\ell = 0$ se $\alpha > \frac{3}{2+\sqrt{2}}$, $\ell = +\infty$ se $\alpha < \frac{3}{2+\sqrt{2}}$.

4. La serie converge, si applicano il criterio del confronto asintotico e il criterio del rapporto.

5. $\ell = -\frac{2}{3}$

6. La funzione è continua in $x = 0$ quando $\alpha = -e/12$, altrimenti (per ogni $\alpha \neq 0$) si ha un punto di discontinuità eliminabile.

7. $F(x) = \log(e^x + 3) - \dfrac{e^x}{e^x + 3}$

8. $y(x) = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{4}{x^2}$

Fila 3

1. $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$, non ci sono simmetrie.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $y = 0$ asintoto orizzontale destro; f non ammette altri asintoti.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) e^{3-x/2}, & x > 0 \\ -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{-x}} + \sqrt{-x}\right) e^{3-x/2}, & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{|x|}\, e^{3-x/2}\left(\frac{1}{x} - 1\right).$$

$\mathrm{dom} f' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x = 0$ è punto di cuspide.

f crescente in $]0, 1[$, decrescente in $]-\infty, 0[$ e in $]1, +\infty[$. $x = 0$ punto di minimo relativo e assoluto (singolare), $x = 1$ punto di massimo relativo stazionario; f è illimitata superiormente.

Abbiamo almeno due punti di flesso, uno in $]-\infty, 0[$ e uno in $]1, +\infty[$.
Analisi in $]-\infty, 0[$: quando $x \to -\infty$ prevale il comportamento dell'esponenziale $e^{-x/2}$, quindi f è convessa, mentre nell'intorno sinistro del punto di cuspide (punto di minimo) f è concava; essendo f continua e derivabile in $]-\infty, 0[$, dovrà esistere almeno un punto di flesso.
Analisi in $]0, +\infty[$: nel punto di massimo relativo $x = 1$, f è concava, mentre quando $x \to +\infty$ la funzione decresce ma ha un asintoto orizzontale, di conseguenza è convessa. Anche qui, essendo f continua e derivabile in $]0, +\infty[$, dovrà esistere almeno un punto di flesso.

2. Le soluzioni sono: $z_0 = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$, $z_1 = 4i$, $z_2 = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$, $z_3 = -4i$. La soluzione z_1 ha molteplicità 2.

3. $\ell = \frac{1}{7}$ se $\alpha = \frac{3}{3+\sqrt{2}}$, $\ell = 0$ se $\alpha > \frac{3}{3+\sqrt{2}}$, $\ell = +\infty$ se $\alpha < \frac{3}{3+\sqrt{2}}$.

4. La serie converge, si applicano il criterio del confronto asintotico e il criterio del rapporto.

5. $\ell = -\frac{3}{4}$

6. La funzione è continua in $x = 0$ quando $\alpha = -e/18$, altrimenti (per ogni $\alpha \neq 0$) si ha un punto di discontinuità eliminabile.

7. $F(x) = \log(e^x + 4) - \dfrac{e^x}{e^x + 4}$

8. $y(x) = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{6}{x^2}$

Fila 4

1. $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$, non ci sono simmetrie.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $y = 0$ asintoto orizzontale destro; f non ammette altri asintoti.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) e^{4-x/2}, & x > 0 \\ -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{-x}} + \sqrt{-x}\right) e^{4-x/2}, & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{|x|}\, e^{4-x/2}\left(\frac{1}{x} - 1\right).$$

$\mathrm{dom} f' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x = 0$ è punto di cuspide.

f crescente in $]0, 1[$, decrescente in $]-\infty, 0[$ e in $]1, +\infty[$. $x = 0$ punto di minimo relativo e assoluto (singolare), $x = 1$ punto di massimo relativo stazionario; f è illimitata superiormente.

Abbiamo almeno due punti di flesso, uno in $]-\infty, 0[$ e uno in $]1, +\infty[$.
Analisi in $]-\infty, 0[$: quando $x \to -\infty$ prevale il comportamento dell'esponenziale $e^{-x/2}$, quindi f è convessa, mentre nell'intorno sinistro del punto di cuspide (punto di minimo) f è concava; essendo f continua e derivabile in $]-\infty, 0[$, dovrà esistere almeno un punto di flesso.
Analisi in $]0, +\infty[$: nel punto di massimo relativo $x = 1$, f è concava, mentre quando $x \to +\infty$ la funzione decresce ma ha un asintoto orizzontale, di conseguenza è convessa. Anche qui, essendo f continua e derivabile in $]0, +\infty[$, dovrà esistere almeno un punto di flesso.

2. Le soluzioni sono: $z_0 = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$, $z_1 = 5i$, $z_2 = 5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$, $z_3 = -5i$. La soluzione z_1 ha molteplicità 2.

3. $\ell = \frac{1}{9}$ se $\alpha = \frac{3}{4+\sqrt{2}}$, $\ell = 0$ se $\alpha > \frac{3}{4+\sqrt{2}}$, $\ell = +\infty$ se $\alpha < \frac{3}{4+\sqrt{2}}$.

4. La serie converge, si applicano il criterio del confronto asintotico e il criterio del rapporto.

5. $\ell = -\frac{4}{5}$

6. La funzione è continua in $x = 0$ quando $\alpha = -e/24$, altrimenti (per ogni $\alpha \neq 0$) si ha un punto di discontinuità eliminabile.

7. $F(x) = \log(e^x + 5) - \dfrac{e^x}{e^x + 5}$

8. $y(x) = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{8}{x^2}$

Fila 5

1. $\mathrm{dom}f = \mathbb{R}$, non ci sono simmetrie.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $y = 0$ asintoto orizzontale destro; f non ammette altri asintoti.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) e^{5-x/2}, & x > 0 \\ -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{-x}} + \sqrt{-x}\right) e^{5-x/2}, & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{|x|}\, e^{5-x/2}\left(\frac{1}{x} - 1\right).$$

$\mathrm{dom}f' = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $x = 0$ è punto di cuspide.

f crescente in $]0,1[$, decrescente in $]-\infty,0[$ e in $]1,+\infty[$. $x = 0$ punto di minimo relativo e assoluto (singolare), $x = 1$ punto di massimo relativo stazionario; f è illimitata superiormente.

Abbiamo almeno due punti di flesso, uno in $]-\infty,0[$ e uno in $]1,+\infty[$.
Analisi in $]-\infty,0[$: quando $x \to -\infty$ prevale il comportamento dell'esponenziale $e^{-x/2}$, quindi f è convessa, mentre nell'intorno sinistro del punto di cuspide (punto di minimo) f è concava; essendo f continua e derivabile in $]-\infty,0[$, dovrà esistere almeno un punto di flesso.
Analisi in $]0,+\infty[$: nel punto di massimo relativo $x = 1$, f è concava, mentre quando $x \to +\infty$ la funzione decresce ma ha un asintoto orizzontale, di conseguenza è convessa. Anche qui, essendo f continua e derivabile in $]0,+\infty[$, dovrà esistere almeno un punto di flesso.

2. Le soluzioni sono: $z_0 = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$, $z_1 = 6i$, $z_2 = 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$, $z_3 = -6i$. La soluzione z_1 ha molteplicità 2.

3. $\ell = \frac{1}{11}$ se $\alpha = \frac{3}{5+\sqrt{2}}$, $\ell = 0$ se $\alpha > \frac{3}{5+\sqrt{2}}$, $\ell = +\infty$ se $\alpha < \frac{3}{5+\sqrt{2}}$.

4. La serie converge, si applicano il criterio del confronto asintotico e il criterio del rapporto.

5. $\ell = -\frac{5}{6}$

6. La funzione è continua in $x = 0$ quando $\alpha = -e/30$, altrimenti (per ogni $\alpha \neq 0$) si ha un punto di discontinuità eliminabile.

7. $F(x) = \log(e^x + 6) - \dfrac{e^x}{e^x + 6}$

8. $y(x) = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{10}{x^2}$

Fila 6

1. $\mathrm{dom}f = \mathbb{R}$, non ci sono simmetrie.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $y = 0$ asintoto orizzontale destro; f non ammette altri asintoti.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) e^{6-x/2}, & x > 0 \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{-x}} + \sqrt{-x}\right) e^{6-x/2}, & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{|x|}\, e^{6-x/2}\left(\frac{1}{x} - 1\right).$$

$\mathrm{dom} f' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x = 0$ è punto di cuspide.

f crescente in $]0,1[$, decrescente in $]-\infty, 0[$ e in $]1, +\infty[$. $x = 0$ punto di minimo relativo e assoluto (singolare), $x = 1$ punto di massimo relativo stazionario; f è illimitata superiormente.

Abbiamo almeno due punti di flesso, uno in $]-\infty, 0[$ e uno in $]1, +\infty[$.
Analisi in $]-\infty, 0[$: quando $x \to -\infty$ prevale il comportamento dell'esponenziale $e^{-x/2}$, quindi f è convessa, mentre nell'intorno sinistro del punto di cuspide (punto di minimo) f è concava; essendo f continua e derivabile in $]-\infty, 0[$, dovrà esistere almeno un punto di flesso.
Analisi in $]0, +\infty[$: nel punto di massimo relativo $x = 1$, f è concava, mentre quando $x \to +\infty$ la funzione decresce ma ha un asintoto orizzontale, di conseguenza è convessa. Anche qui, essendo f continua e derivabile in $]0, +\infty[$, dovrà esistere almeno un punto di flesso.

2. Le soluzioni sono: $z_0 = 7\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$, $z_1 = 7i$, $z_2 = 7\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$, $z_3 = -7i$. La soluzione z_1 ha molteplicità 2.

3. $\ell = \frac{1}{13}$ se $\alpha = \frac{3}{6+\sqrt{2}}$, $\ell = 0$ se $\alpha > \frac{3}{6+\sqrt{2}}$, $\ell = +\infty$ se $\alpha < \frac{3}{6+\sqrt{2}}$.

4. La serie converge, si applicano il criterio del confronto asintotico e il criterio del rapporto.

5. $\ell = -\frac{6}{7}$

6. La funzione è continua in $x = 0$ quando $\alpha = -e/36$, altrimenti (per ogni $\alpha \neq 0$) si ha un punto di discontinuità eliminabile.

7. $F(x) = \log(e^x + 7) - \dfrac{e^x}{e^x + 7}$

8. $y(x) = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{12}{x^2}$