

Cognome e nome ..... Firma..... Matricola.....

Corso di Laurea:  $\diamond$  INFLT,  $\diamond$  ETELT,  $\diamond$  MECLT,  $\diamond$  AUTLT,  $\diamond$  MATLT,  $\diamond$  MECMLT

### Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, telefoni cellulari.
5. CONSEGNARE **questo foglio e tutti i fogli di protocollo.**
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

1. Sia data la seguente funzione  $f$  reale di variabile reale definita da:

$$f(x) = \log(x) e^{2/\log x}.$$

Determinare il dominio di  $f$  ed eventuali simmetrie.

**Risposta [punti 1]:**

Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per  $f$ .

**Risposta [punti 2.5]:**

Calcolare la funzione derivata prima di  $f$  e determinarne il dominio, classificando eventuali punti di non derivabilità.

**Risposta [punti 1]:**

Studiare la crescita e decrescita di  $f$ , calcolando, qualora esistano, punti di massimo/minimo relativo e punti di massimo/minimo assoluto per  $f$ .

**Risposta [punti 1.5]:**

Senza calcolare la derivata seconda di  $f$  discutere la possibile esistenza di punti di flesso.

**Risposta [punti 1]:**

Tracciare sul foglio di protocollo un grafico qualitativo della funzione  $f$ , in accordo con i risultati ottenuti.

**Risposta [punti 1]:**

2. Determinare il luogo geometrico  $A$  dei punti  $z \in \mathbb{C}$  tali che

$$(|\operatorname{Re}(z)| + 3|\operatorname{Im}(z)|) \left( z\bar{z} - (\operatorname{Re}(z))^2 - ie^{\frac{3}{2}\pi i} - \frac{z + \bar{z}}{2} \right) = 0.$$

**Risposta [punti 3]:**

3. Calcolare al variare di  $\beta \in \mathbb{R}$  il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \frac{(n+1)! - n!}{3n^{n+1}} + \frac{\cos \frac{1}{n} - \cos \frac{1}{n^2}}{3n^\beta} \right]$$

**Risposta [punti 3]:**

---

4. Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos(x^2)}}{3x \sin x + 3x^2 \cosh x + 6 \log(1 - x^2)}.$$

**Risposta [punti 3]:**

---

5. Discutere al variare di  $\beta \in \mathbb{R}$  il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^{n+3}}{7^n \arctan(n) \log(n^3 + 1)}$$

**Risposta [punti 4]:**

---

6. Siano  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  data da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(e^{1-x} - 1)^{7\alpha}}{\sin(1 - x^2)} & \text{se } x < 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \\ (x - 1)^2 \log(x - 1) & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Discutere, al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la continuità di  $f$  in  $x = 1$ .

**Risposta [punti 3]:**

---

7. Determinare la primitiva  $F(x)$  della funzione

$$f(x) = \frac{e^{3x} - 1}{e^{3x} + 1}$$

tale che  $F(0) = \frac{\log 4}{3}$ .

**Risposta [punti 3]:**

---

8. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \frac{y}{x} = \sin(7x) \\ y(2\pi) = -\frac{1}{7} \end{cases}$$

**Risposta [punti 3]:**

---