ANALISI MATEMATICA I - 29 marzo 2010 - Allievi AUTLT - INFLT - ETELT

Il NUMERO della FILA è contenuto nel testo dell'esercizio 1 ed è pari al valore costante sommato al termine $\frac{x|x|-1}{x+1}$ nella definizione di $f(x)$.

Fila 1

1. (a) $\operatorname{dom} f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Per la definizione di modulo si ha

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ \dfrac{-x^2-1}{x+1} + 1 & x < 0 \end{cases}$$

quindi la funzione è una retta per $x \geq 0$.

(b) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$. $y = -x+2$ è asintoto obliquo sinistro, $x = -1$ è asintoto verticale completo. Non ci sono asintoti orizzontali.

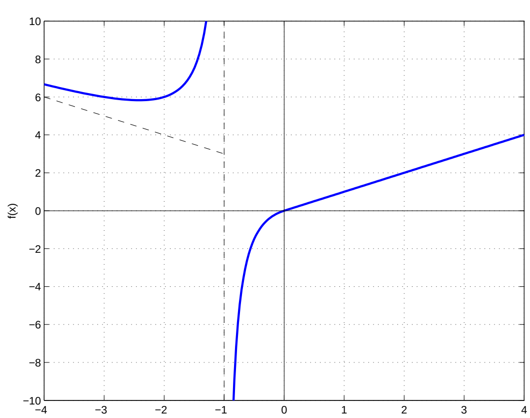
(c)

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \dfrac{-x^2-2x+1}{(x+1)^2} & x < 0 \end{cases}$$

Calcoliamo limiti destro e sinistro della derivata per $x \to 0^{\pm}$.
Si ha $\lim_{x\to 0^{\pm}} f'(x) = 1$, quindi la funzione è derivabile anche in $x = 1$ e $f'(1) = 1$ e $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$. Non ci sono punti di non derivabilità.

(d) f strettamente crescente in $(-1-\sqrt{2}, -1) \cup (-1, +\infty)$; f strettamente decrescente in $(-\infty, -1-\sqrt{2})$;
$x = -1-\sqrt{2}$ è punto di minimo relativo stazionario. Non esistono punti di massimo/minimo assoluto in quanto f è illimitata.

(e) Calcoliamo $f''(x)$ solo per $x < 0$, visto che f è una retta per $x > 0$. Si ha $f''(x) = \dfrac{-4}{(1+x)^3}$.
Non esistono flessi. f è strettamente convessa in $(-\infty, -1)$ e strettamente concava in $(-1, 0)$.



2. L'insieme delle soluzioni è la circonferenza di centro $z_0 = 1/2 + i0$ e raggio $r = 1/2$, privata del punto $0 + i0$.

3. Il limite è $\ell = 4$.

4. La serie è convergente.

5. La derivata è
$$f'(x) = \frac{2e^{2x}}{2(2+e^{2x})\sqrt{e^{2x}+1}}.$$

6. L'integrale vale $4(e-1)$.

7. L'integrale converge per $\alpha > -2/3$.

8. La soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = \log\left[e^{2x^3} + 7\right]$.

Fila 2

1. (a) $\operatorname{dom} f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Per la definizione di modulo si ha
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 0 \\ \dfrac{-x^2-1}{x+1} + 2 & x < 0 \end{cases}$$
quindi la funzione è una retta per $x \geq 0$.

(b) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$. $y = -x+3$ è asintoto obliquo sinistro, $x = -1$ è asintoto verticale completo. Non ci sono asintoti orizzontali.

(c)
$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \dfrac{-x^2-2x+1}{(x+1)^2} & x < 0 \end{cases}$$
Calcoliamo limiti destro e sinistro della derivata per $x \to 0^{\pm}$.
Si ha $\lim_{x\to 0^{\pm}} f'(x) = 1$, quindi la funzione è derivabile anche in $x = 1$ e $f'(1) = 1$ e $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$. Non ci sono punti di non derivabilità.

(d) f strettamente crescente in $(-1-\sqrt{2}, -1) \cup (-1, +\infty)$; f strettamente decrescente in $(-\infty, -1-\sqrt{2})$;
$x = -1-\sqrt{2}$ è punto di minimo relativo stazionario. Non esistono punti di massimo/minimo assoluto in quanto f è illimitata.

(e) Calcoliamo $f''(x)$ solo per $x < 0$, visto che f è una retta per $x > 0$. Si ha $f''(x) = \dfrac{-4}{(1+x)^3}$.
Non esistono flessi. f è strettamente convessa in $(-\infty, -1)$ e strettamente concava in $(-1, 0)$.

2. L'insieme delle soluzioni è la circonferenza di centro $z_0 = 1/4 + i0$ e raggio $r = 1/4$, privata del punto $0 + i0$.

3. Il limite è $\ell = 6$.

4. La serie è convergente.

5. La derivata è

$$f'(x) = \frac{3e^{3x}}{2(2+e^{3x})\sqrt{e^{3x}+1}}.$$

6. L'integrale vale $6(e-1)$.

7. L'integrale converge per $\alpha > -3/5$.

8. La soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = \log\left[e^{3x^3}+6\right]$.

Fila 3

1. (a) $\operatorname{dom} f = (-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$. Per la definizione di modulo si ha

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & x \geq 0 \\ \dfrac{-x^2-1}{x+1}+3 & x < 0 \end{cases}$$

quindi la funzione è una retta per $x \geq 0$.

(b) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$. $y = -x+4$ è asintoto obliquo sinistro, $x=-1$ è asintoto verticale completo. Non ci sono asintoti orizzontali.

(c)

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \dfrac{-x^2-2x+1}{(x+1)^2} & x < 0 \end{cases}$$

Calcoliamo limiti destro e sinistro della derivata per $x \to 0^{\pm}$.
Si ha $\lim_{x\to 0^{\pm}} f'(x) = 1$, quindi la funzione è derivabile anche in $x=1$ e $f'(1)=1$ e $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$. Non ci sono punti di non derivabilità.

(d) f strettamente crescente in $(-1-\sqrt{2},-1)\cup(-1,+\infty)$; f strettamente decrescente in $(-\infty,-1-\sqrt{2})$;
$x=-1-\sqrt{2}$ è punto di minimo relativo stazionario. Non esistono punti di massimo/minimo assoluto in quanto f è illimitata.

(e) Calcoliamo $f''(x)$ solo per $x<0$, visto che f è una retta per $x>0$. Si ha $f''(x) = \dfrac{-4}{(1+x)^3}$.
Non esistono flessi. f è strettamente convessa in $(-\infty,-1)$ e strettamente concava in $(-1,0)$.

2. L'insieme delle soluzioni è la circonferenza di centro $z_0 = 1/6 + i0$ e raggio $r = 1/6$, privata del punto $0+i0$.

3. Il limite è $\ell = 8$.

4. La serie è convergente.

5. La derivata è

$$f'(x) = \frac{4e^{4x}}{2(2+e^{4x})\sqrt{e^{4x}+1}}.$$

6. L'integrale vale $8(e-1)$.

7. L'integrale converge per $\alpha > -4/7$.

8. La soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = \log\left[e^{4x^3} + 5\right]$.

Fila 4

1. (a) $\operatorname{dom} f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Per la definizione di modulo si ha

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & x \geq 0 \\ \dfrac{-x^2-1}{x+1} + 4 & x < 0 \end{cases}$$

quindi la funzione è una retta per $x \geq 0$.

(b) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$. $y = -x + 5$ è asintoto obliquo sinistro, $x = -1$ è asintoto verticale completo. Non ci sono asintoti orizzontali.

(c)

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \dfrac{-x^2-2x+1}{(x+1)^2} & x < 0 \end{cases}$$

Calcoliamo limiti destro e sinistro della derivata per $x \to 0^{\pm}$.
Si ha $\lim_{x\to 0^{\pm}} f'(x) = 1$, quindi la funzione è derivabile anche in $x = 1$ e $f'(1) = 1$ e $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$. Non ci sono punti di non derivabilità.

(d) f strettamente crescente in $(-1-\sqrt{2}, -1) \cup (-1, +\infty)$; f strettamente decrescente in $(-\infty, -1-\sqrt{2})$;
$x = -1-\sqrt{2}$ è punto di minimo relativo stazionario. Non esistono punti di massimo/minimo assoluto in quanto f è illimitata.

(e) Calcoliamo $f''(x)$ solo per $x < 0$, visto che f è una retta per $x > 0$. Si ha $f''(x) = \dfrac{-4}{(1+x)^3}$.
Non esistono flessi. f è strettamente convessa in $(-\infty, -1)$ e strettamente concava in $(-1, 0)$.

2. L'insieme delle soluzioni è la circonferenza di centro $z_0 = 1/8 + i0$ e raggio $r = 1/8$, privata del punto $0 + i0$.

3. Il limite è $\ell = 10$.

4. La serie è convergente.

5. La derivata è

$$f'(x) = \frac{5e^{5x}}{2(2+e^{5x})\sqrt{e^{5x}+1}}.$$

6. L'integrale vale $10(e-1)$.

7. L'integrale converge per $\alpha > -5/9$.

8. La soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = \log\left[e^{5x^3} + 4\right]$.

Fila 5

1. (a) $\operatorname{dom} f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Per la definizione di modulo si ha

$$f(x) = \begin{cases} x{+}4 & x \geq 0 \\ \dfrac{-x^2 - 1}{x + 1} + 5 & x < 0 \end{cases}$$

quindi la funzione è una retta per $x \geq 0$.

(b) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = -\infty$. $y = -x + 6$ è asintoto obliquo sinistro, $x = -1$ è asintoto verticale completo. Non ci sono asintoti orizzontali.

(c)

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \dfrac{-x^2 - 2x + 1}{(x + 1)^2} & x < 0 \end{cases}$$

Calcoliamo limiti destro e sinistro della derivata per $x \to 0^{\pm}$.
Si ha $\lim_{x \to 0^{\pm}} f'(x) = 1$, quindi la funzione è derivabile anche in $x = 1$ e $f'(1) = 1$ e $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$. Non ci sono punti di non derivabilità.

(d) f strettamente crescente in $(-1 - \sqrt{2}, -1) \cup (-1, +\infty)$; f strettamente decrescente in $(-\infty, -1 - \sqrt{2})$;
$x = -1 - \sqrt{2}$ è punto di minimo relativo stazionario. Non esistono punti di massimo/minimo assoluto in quanto f è illimitata.

(e) Calcoliamo $f''(x)$ solo per $x < 0$, visto che f è una retta per $x > 0$. Si ha $f''(x) = \dfrac{-4}{(1 + x)^3}$.
Non esistono flessi. f è strettamente convessa in $(-\infty, -1)$ e strettamente concava in $(-1, 0)$.

2. L'insieme delle soluzioni è la circonferenza di centro $z_0 = 1/10 + i0$ e raggio $r = 1/10$, privata del punto $0 + i0$.

3. Il limite è $\ell = 12$.

4. La serie è convergente.

5. La derivata è

$$f'(x) = \frac{6e^{6x}}{2(2 + e^{6x})\sqrt{e^{6x} + 1}}.$$

6. L'integrale vale $12(e - 1)$.

7. L'integrale converge per $\alpha > -6/11$.

8. La soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = \log\left[e^{6x^3} + 3\right]$.

Fila 6

1. (a) $\operatorname{dom} f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Per la definizione di modulo si ha

$$f(x) = \begin{cases} x{+}5 & x \geq 0 \\ \dfrac{-x^2-1}{x+1} + 6 & x < 0 \end{cases}$$

quindi la funzione è una retta per $x \geq 0$.

(b) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$. $y = -x+7$ è asintoto obliquo sinistro, $x = -1$ è asintoto verticale completo. Non ci sono asintoti orizzontali.

(c)

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \dfrac{-x^2-2x+1}{(x+1)^2} & x < 0 \end{cases}$$

Calcoliamo limiti destro e sinistro della derivata per $x \to 0^{\pm}$.
Si ha $\lim_{x\to 0^{\pm}} f'(x) = 1$, quindi la funzione è derivabile anche in $x = 1$ e $f'(1) = 1$ e $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$. Non ci sono punti di non derivabilità.

(d) f strettamente crescente in $(-1-\sqrt{2}, -1) \cup (-1, +\infty)$; f strettamente decrescente in $(-\infty, -1-\sqrt{2})$;
$x = -1-\sqrt{2}$ è punto di minimo relativo stazionario. Non esistono punti di massimo/minimo assoluto in quanto f è illimitata.

(e) Calcoliamo $f''(x)$ solo per $x < 0$, visto che f è una retta per $x > 0$. Si ha $f''(x) = \dfrac{-4}{(1+x)^3}$.
Non esistono flessi. f è strettamente convessa in $(-\infty, -1)$ e strettamente concava in $(-1, 0)$.

2. L'insieme delle soluzioni è la circonferenza di centro $z_0 = 1/12 + i0$ e raggio $r = 1/12$, privata del punto $0 + i0$.

3. Il limite è $\ell = 14$.

4. La serie è convergente.

5. La derivata è

$$f'(x) = \frac{7e^{7x}}{2(2+e^{7x})\sqrt{e^{7x}+1}}.$$

6. L'integrale vale $14(e-1)$.

7. L'integrale converge per $\alpha > -7/13$.

8. La soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = \log\left[e^{7x^3} + 2\right]$.