

---

Cognome e nome ..... Firma .....

Corso di Laurea:   ◇ GESL   ◇ INFL;

---

**Istruzioni**

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare e segnare il proprio corso di laurea.**
  2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
  3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
  4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, telefoni cellulari.
  5. CONSEGNARE **questo foglio e tutti i fogli di protocollo.**
  6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
  7. TEMPO a disposizione: 150 min.
- 

1. Sia data la seguente funzione  $f$  reale di variabile reale definita da:

$$f(x) = \frac{1}{2} \log^2 x - (\log^2 3) \log(|\log x|)$$

Tracciare un grafico qualitativo della funzione  $f$ , in accordo con i risultati ottenuti, sui fogli di protocollo.

Determinare il dominio di  $f$  ed eventuali simmetrie.

**Risposta [punti 1]:**

---

Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per  $f$ .

**Risposta [punti 3]:**

---

Calcolare la funzione derivata prima di  $f$  classificando eventuali punti di non derivabilità.

**Risposta [punti 1]:**

---

Studiare la crescita e decrescita di  $f$ , calcolando, qualora esistano, punti di massimo/minimo relativo e punti di massimo/minimo assoluto per  $f$ .

**Risposta [punti 2]:**

---

Senza calcolare la derivata seconda di  $f$ , dire se  $f$  ammette almeno un punto di flesso e rappresentarlo graficamente.

**Risposta [punti 1]:**

---

2. Determinare il luogo geometrico degli  $z \in \mathbb{C}$  tali che

$$[|z - 3i|^2 + \operatorname{Re}(z + 6\bar{z})\operatorname{Im}(z - \bar{z})i - (7i + 1)z\bar{z}] \in \mathbb{R}$$

**Risposta [punti 3]:**

---

3. Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n + 7n \log n + n \sin n}{(n + 2)^n + n \log \frac{1}{n} + n \sin \frac{1}{n}}$$

**Risposta [punti 3]:**

---

4. Determinare il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{5^n (n!)^2}$$

**Risposta [punti 3]:**

---

5. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 \sin(x-1) + (x-1)^2}{2(e^{x-1} - 1)} & \text{se } x \neq 1, \\ \alpha - 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Dire per quali valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$  la funzione  $f$  è continua in  $x = 1$ . Negli altri casi classificare il tipo di discontinuità. Dire per quali valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$  la funzione  $f$  è derivabile in  $x = 1$ .

**Risposta [punti 5]:**

---

6. Calcolare l'integrale improprio seguente

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(\sqrt{7x})}{(1+7x)\sqrt{7x}} dx$$

**Risposta [punti 4]:**

---

7. Determinare la soluzione  $y(x)$  del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 49y = \cos x, \\ y(0) = \frac{1}{48}, \quad y'(0) = 7. \end{cases}$$

**Risposta [punti 4]:**

---

1. Sia data la seguente funzione  $f$  reale di variabile reale definita da:

$$f(x) = \frac{1}{2} \log^2 x - (\log^2 3) \log(|\log x|)$$

Tracciare un grafico qualitativo della funzione  $f$ , in accordo con i risultati ottenuti, sui fogli di protocollo.

Determinare il dominio di  $f$  ed eventuali simmetrie.

**Risposta [punti 1]:**

---

Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per  $f$ .

**Risposta [punti 3]:**

---

Calcolare la funzione derivata prima di  $f$  classificando eventuali punti di non derivabilità.

**Risposta [punti 1]:**

---

Studiare la crescita e decrescita di  $f$ , calcolando, qualora esistano, punti di massimo/minimo relativo e punti di massimo/minimo assoluto per  $f$ .

**Risposta [punti 2]:**

---

Senza calcolare la derivata seconda di  $f$ , dire se  $f$  ammette almeno un punto di flesso e rappresentarlo graficamente.

**Risposta [punti 1]:**

---

2. Determinare il luogo geometrico degli  $z \in \mathbb{C}$  tali che

$$\left[ |z - 3i|^2 + \operatorname{Re}(z + 6\bar{z})\operatorname{Im}(z - \bar{z})i - (7i + 1)z\bar{z} \right] \in \mathbb{R}$$

**Risposta [punti 3]:**

---

3. Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n + 7n \log n + n \sin n}{(n+2)^n + n \log \frac{1}{n} + n \sin \frac{1}{n}}$$

**Risposta [punti 3]:**

---

4. Determinare il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{5^n (n!)^2}$$

**Risposta [punti 3]:**

---

5. Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 \sin(x-1) + (x-1)^2}{2(e^{x-1} - 1)} & \text{se } x \neq 1, \\ \alpha - 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Dire per quali valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$  la funzione  $f$  è continua in  $x = 1$ . Negli altri casi classificare il tipo di discontinuità. Dire per quali valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$  la funzione  $f$  è derivabile in  $x = 1$ .

**Risposta [punti 5]:**

---

6. Calcolare l'integrale improprio seguente

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(\sqrt{7x})}{(1+7x)\sqrt{7x}} dx$$

**Risposta [punti 4]:**

---

7. Determinare la soluzione  $y(x)$  del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 49y = \cos x, \\ y(0) = \frac{1}{48}, \quad y'(0) = 7. \end{cases}$$

**Risposta [punti 4]:**

---