Esercizi di Analisi Matematica 1, utili per la preparazione all'esame scritto - Seconda parte
SOLUZIONI

Es. 1 Per ognuna delle seguenti figure, dire se la curva nel piano cartesiano è la curva del grafico di una funzione reale a variabile reale e, in caso affermativo, individuare dom$f$, im$f$, eventuali simmetrie; discutere la continuità, la derivabilità; dire se la funzione ammette asintoti verticali, orizzontali, obliqui; dire in quali intervalli la funzione è crescente/decrescente, convessa/concava; individuare eventuali punti di massimo e minimo relativo e assoluto ed eventuali punti flesso.

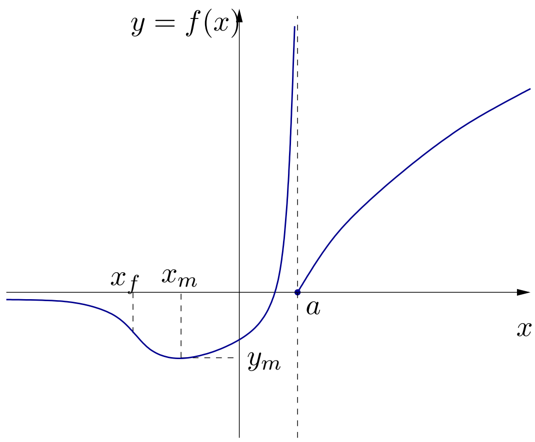


Figura 1

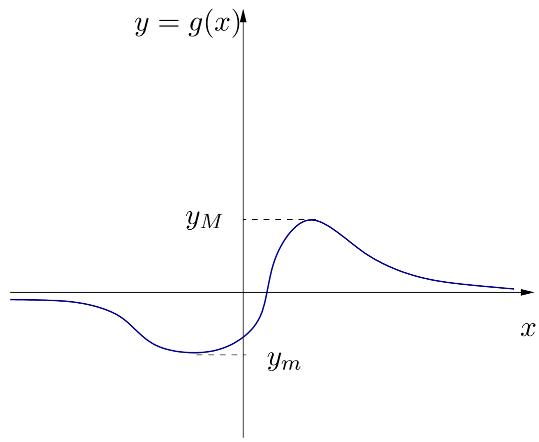


Figura 2

Svolgimento per la funzione rappresentata in **Figura 1.** La curva è il grafico di una funzione. dom$f = \mathbb{R}$, im$f = [y_m, +\infty)$. La funzione non è pari né dispari, è continua in $\mathbb{R} \setminus \{a\}$. Il punto $x_0 = a$ è punto di infinito (essendo f definita in $x = a$ ed essendo $f(a) = 0$). Dove è continua la funzione è anche derivabile. La retta $x = a$ è asintoto verticale sinistro. La retta $y = 0$ è asintoto orizzontale sinistro. Non sono evidenti asintoti obliqui. La funzione è decrescente in $(-\infty, x_m]$ e crescente in $[x_m, a) \cup (a, +\infty)$. Il punto x_m è un punto di minimo relativo. La funzione è convessa in (x_f, a), è concava in $(-\infty, x_f) \cup (a, +\infty)$. Esiste un punto di flesso: $x = x_f$. Il punto di minimo relativo è anche punto di minimo assoluto, mentre non esistono punti di massimo relativo o assoluto.

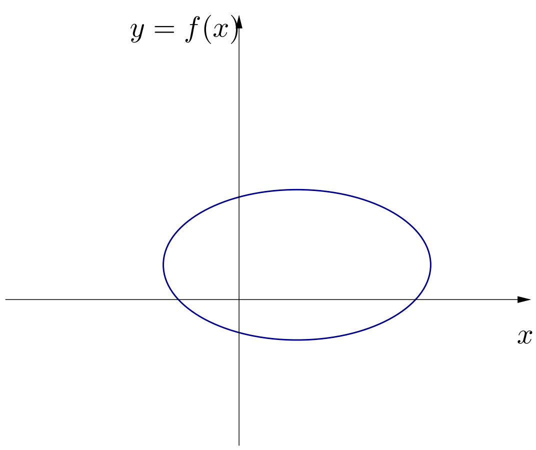


Figura 3

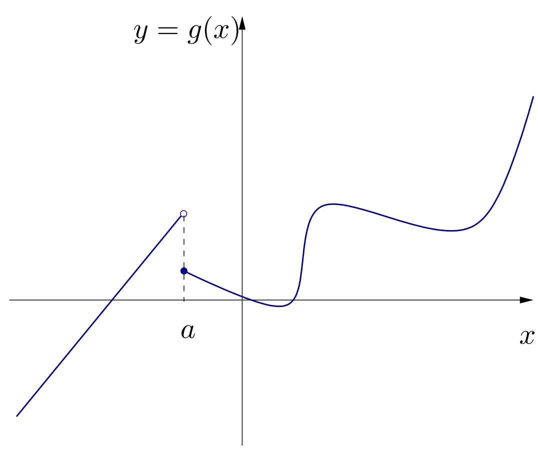


Figura 4

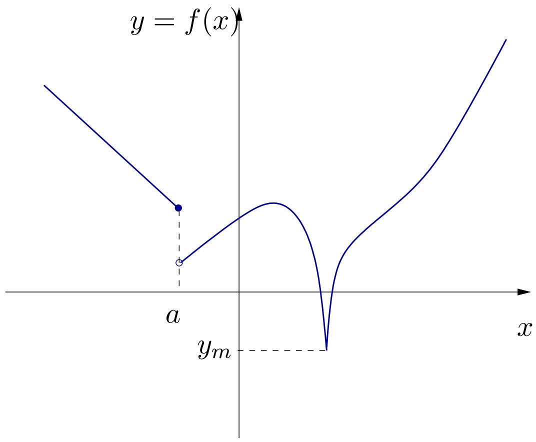


Figura 5

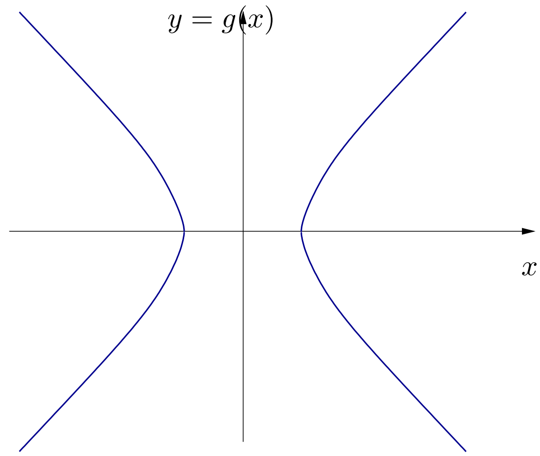


Figura 6

Es. 2 Studiare le seguenti funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^2 + \sqrt[3]{x^4} + 1$

b) $f(x) = x^2 + x - |x| + 1$

c) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}+1} + \dfrac{x}{4}$

d) $f(x) = x(x-2) + 4\sqrt[4]{(x+1)^2} - 3$

e)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq -\pi \\ \sin^2(x) & \text{se } -\pi < x \leq 0 \\ x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

f) $f(x) = \sqrt[3]{2-x}\,\sqrt[3]{x^2}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{\log|x-2|}$

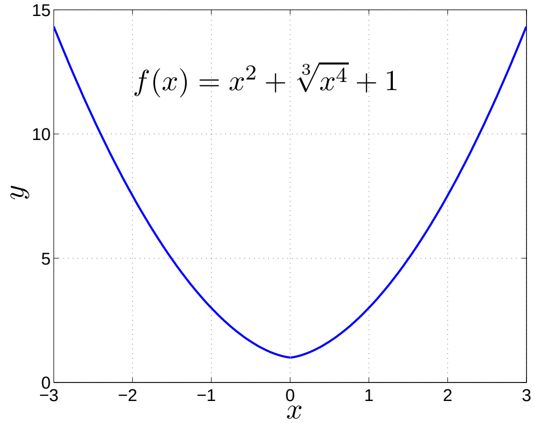
h) $f(x) = |\log(x^2+1)|$

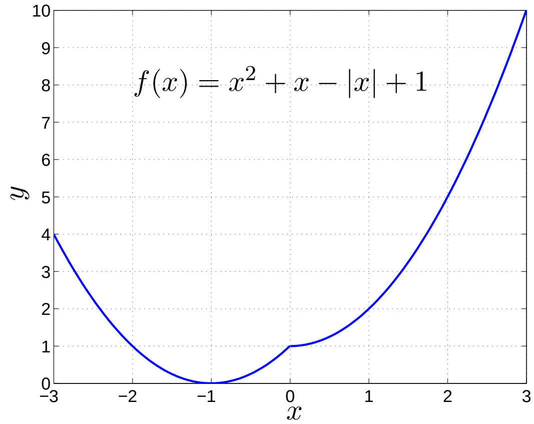
i) $f(x) = \sqrt[3]{1 - \sin x}$ sull'intervallo $[-\pi, \pi]$

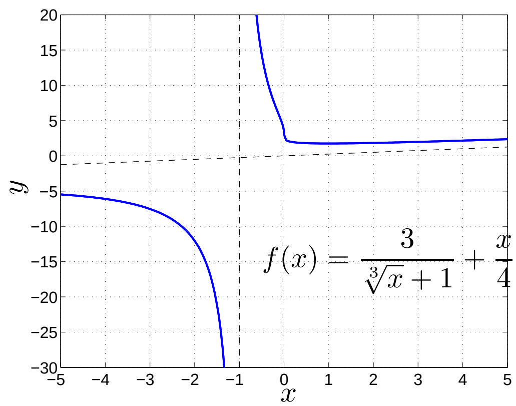
j) $f(x) = 1 - \sqrt{2}\arctan\dfrac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$

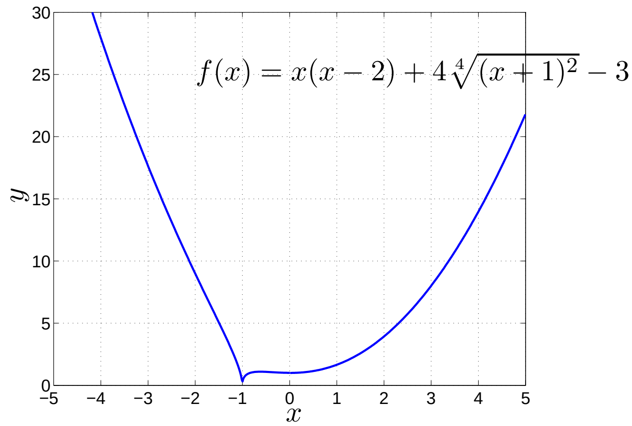
k) $f(x) = \dfrac{1}{\log^2 x} - \dfrac{2}{\log x} + 1$

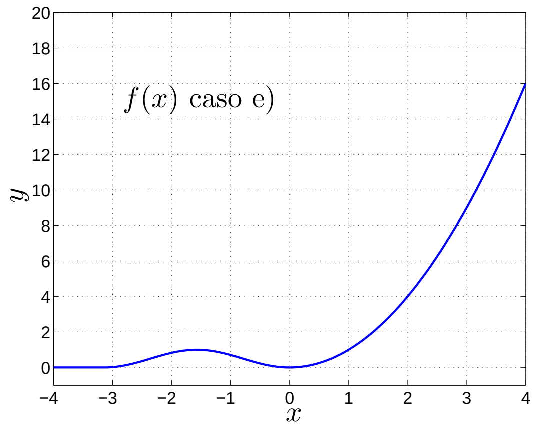
l) $f(x) = 4|x|e^{-(x^2+3)}$

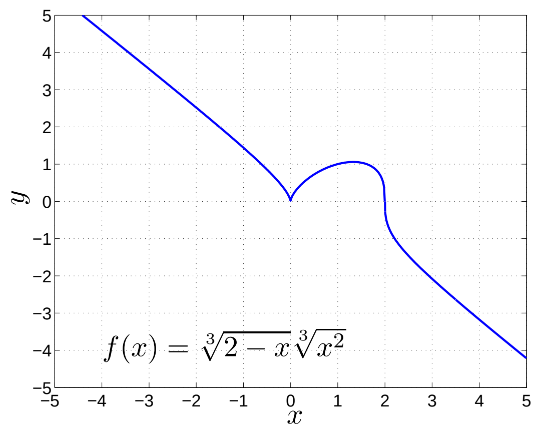

$f(x) = x^2 + \sqrt[3]{x^4} + 1$
y
x

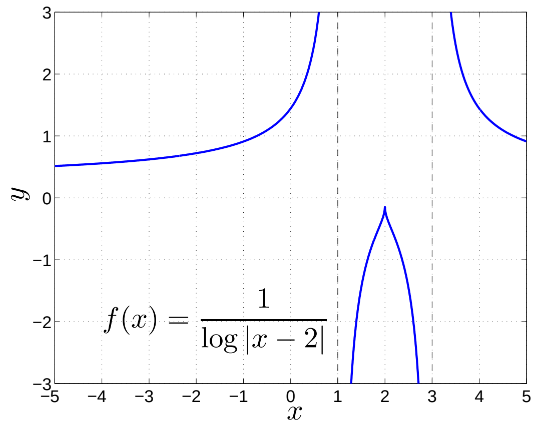

$f(x) = x^2 + x - |x| + 1$
y
x

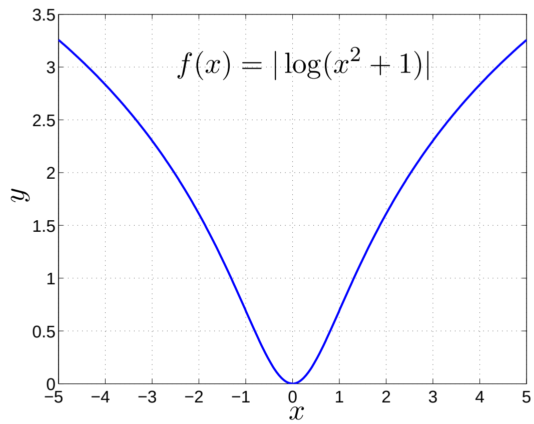

$f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{x}+1} + \frac{x}{4}$
y
x

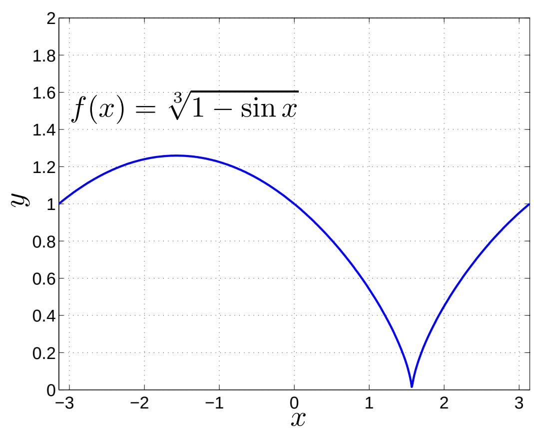

$f(x) = x(x-2) + 4\sqrt[4]{(x+1)^2} - 3$
y
x

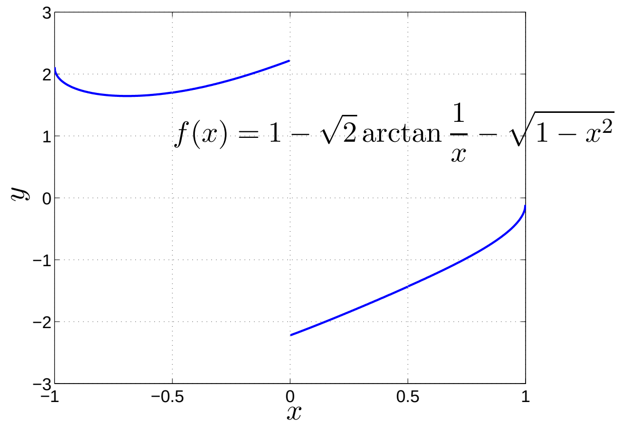

$f(x)$ caso e)
y
x

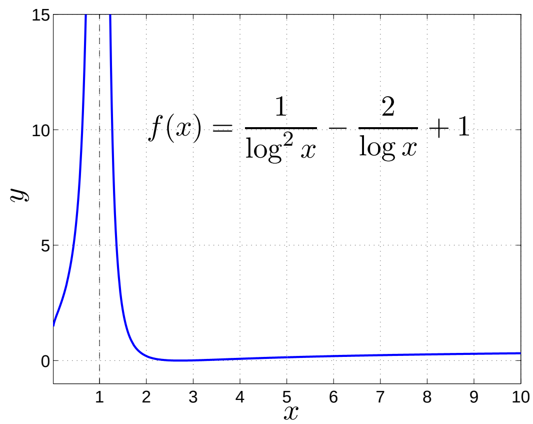

$f(x) = \sqrt[3]{2-x}\sqrt[3]{x^2}$
y
x

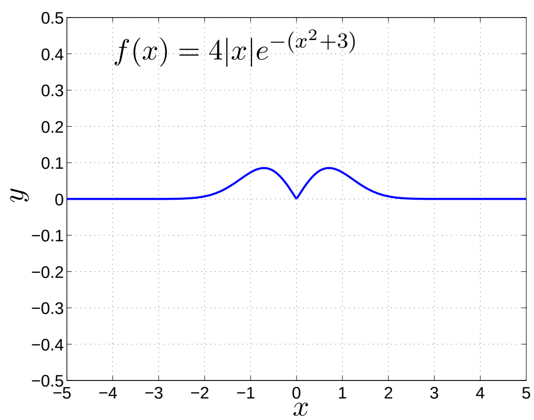

$f(x) = \frac{1}{\log|x-2|}$
x
y


$f(x) = |\log(x^2+1)|$
x
y


$f(x) = \sqrt[3]{1-\sin x}$
x
y


$f(x) = 1 - \sqrt{2}\arctan\frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$
y
x
3
2
1
0
−1
−2
−3
−1
−0.5
0
0.5
1


$f(x) = \frac{1}{\log^2 x} - \frac{2}{\log x} + 1$
y
x
15
10
5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10


$f(x) = 4|x|e^{-(x^2+3)}$
y
x
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
−0.1
−0.2
−0.3
−0.4
−0.5
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5

Es. 3 Calcolare i seguenti limiti di funzione:

a) $\lim_{x\to+\infty} x(e^{2/x}-1)$ [R. 2]

b) $\lim_{x\to 0}(1+\sin^2 x)^{1/\log(1+x^2)}$ [R. e]

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{e^x-1}}{\sqrt{e^x+1}}$ [R. 1]

d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}\left(\frac{\pi}{2}-\arccos\sqrt[4]{x}\right)}{\sin^3(\sqrt[4]{x})}$ [R. 1]

e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\log^2 x}}{x^2}$ [R. $+\infty$]

f) $\lim_{x\to+\infty}(x^{\sqrt{x}}-2^x)$ [R. $+\infty$]

g) $\lim_{x\to+\infty}(xe^{-1/x}-(x+2))$ [R. -3]

Es. 4 Calcolare lo sviluppo di Taylor di grado 3 delle seguenti funzioni nel punto x_0 a fianco indicato.

a) $f(x)=\sin(x^2)$ in $x_0=\pi/2$ [R. $p_3(x)=\sin\left(\frac{\pi^2}{4}\right)+\pi\cos\left(\frac{\pi^2}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\left[\cos\left(\frac{\pi^2}{4}\right)-\frac{\pi^2}{2}\sin\left(\frac{\pi^2}{4}\right)\right]\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2-\pi\left[\sin\left(\frac{\pi^2}{4}\right)+\frac{\pi^2}{6}\cos\left(\frac{\pi^2}{4}\right)\right]\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3$]

b) $f(x)=\arctan(x)$ in $x_0=1$ [R. $p_3(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{1}{12}(x-1)^3$]

c) $f(x)=e^{(x-2)}$ in $x_0=2$ [R. $p_3(x)=1+(x-2)+\frac{1}{2}(x-2)^2+\frac{1}{6}(x-2)^3$]

d) $f(x)=x\log(x+1)$ in $x_0=0$ [R. $p_3(x)=x^2-\frac{1}{2}x^3$]

e) $f(x)=\sqrt{2x+3}$ in $x_0=-1$ [R. $p_3(x)=1+(x+1)-\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{1}{2}(x+1)^3$]

Es. 5 Determinare per quali valori di x sono definite, per quali continue, per quali derivabili le funzioni reali $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ seguenti:

a)

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{se } |x|\le 1\\ x^2-1 & \text{se } |x|>1\end{cases}$$

[R. dom$f=\mathbb{R}$, f è continua in $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $x=1$ è punto di salto. f è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $x=-1$ è punto angoloso.]

b)

$$f(x)=\begin{cases} (x-3)^2\sin\left(\dfrac{1}{x-3}\right) & \text{se } x\ne 3\\ 8 & \text{se } x=3\end{cases}$$

[R. dom$f=\mathbb{R}$, f è continua in $\mathbb{R}\setminus\{3\}$, $x=3$ è punto di disc. eliminabile. f è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.]

c)

$$f(x) = \begin{cases} |\log(x)| & \text{se } \frac{1}{2} \le x \le e \\ x - 5 & \text{se } e < x \le 5 \end{cases}$$

[R. dom$f = [1/2, 5]$, f è continua in dom$f \setminus \{e\}$, $x = e$ è punto di salto. f è derivabile in dom$f \setminus \{1, e\}$, $x = 1$ è punto angoloso.]

d)

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{\log(x^2)}\right) + |x - 3|$$

[R. dom$f = \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$, f è continua sul suo dominio. f è derivabile in dom$f \setminus \{3\}$, $x = 3$ è punto angoloso.]

Es. 6 Si considerino le funzioni $y = f(x) = e^x$ e $y = g(x) = 4 - e^{\lambda - x}$. Determinare il valore di $\lambda \in \mathbb{R}$ in modo che i grafici delle due funzioni abbiano in un punto comune la stessa tangente. Determinare anche l'ascissa del punto di contatto.

[R. $\lambda = 2\log 2$ ed il punto di contatto è $x_0 = \log 2$]

Es. 7 Calcolare le derivate prime e seconde delle seguenti funzioni:

a) $f(x) = \log(x - \sqrt{x^2 - 1})$ b) $f(x) = \sqrt{1 + x}$

c) $f(x) = \log(1 + x)$ d) $f(x) \arctan = \left(\frac{1}{x}\right)$

e) $f(x) = (\sqrt{x})^{x-1}$ f) $f(x) = \frac{1}{\sin x \cos x}$

g) $f(x) = \frac{1 + 3x + 5x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}$ h) $f(x) = x^{2x}$

i) $f(x) = e^{\frac{\log x}{x}}$ j) $f(x) = \arcsin(\cos(3x + 1))$

k) $f(x) = \tan(\log(x^2))$ l) $f(x) = x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1 + x^2)$

Risposte:

a) $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$, $f''(x) = \frac{x}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}$

b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + 1}}$, $f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{(x + 1)^3}}$

c) $f'(x) = \frac{1}{x + 1}$, $f''(x) = -\frac{1}{(x + 1)^2}$

d) $f'(x) = -\frac{1}{x^2 + 1}$, $f''(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$

e) $f'(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{x})^{(x-1)} \left(\log x + 1 - \frac{1}{x} \right)$

$$f''(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{x})^{(x-1)} \left[\frac{1}{2} \left(\log x + 1 - \frac{1}{x} \right)^2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right]$$

f) $f'(x) = -\frac{4\cos(2x)}{\sin^2(2x)}, \qquad f''(x) = \frac{1 + 8\cos^2(2x)}{\sin^3(2x)}$

g) $f'(x) = \frac{3x - 2 + 15x^{5/3}}{3x^{5/3}}, \qquad f''(x) = \frac{10 - 6x + 60x^{5/3}}{9x^{8/3}}$

h) $f'(x) = 2(x^{2x})(\log x + 1), \qquad f''(x) = 2(x^{2x}) \left[2(\log x + 1)^2 + \frac{1}{x} \right]$

i) $f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2} e^{\frac{\log x}{x}}, \qquad f''(x) = \frac{1 - 3x + \log x(\log x - 2 + 2x)}{x^4} e^{\frac{\log x}{x}}$

j) $f'(x) = -3 \cdot sign(\sin(3x+1))$ (dove $sign(x) = +1$ se $x > 0$ e $sign(x) = -1$ se $x < 0$).
f non è derivabile dove $\sin(3x+1) = 0$.
$f''(x) = 0$ in $\mathbb{R} \setminus \{x : \sin(3x+1) = 0\}$.

k) $f'(x) = \frac{2}{x \cos^2(\log(x^2))}, \qquad f''(x) = \frac{2(4\sin(\log(x^2)) - \cos(\log(x^2)))}{x^2 \cos^3(\log(x^2))}$

l) $f'(x) = \arctan x, \qquad f''(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Es. 8 Calcolare i seguenti limiti di funzioni utilizzando gli sviluppi di Taylor:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x \sin x - (x+1)\tan x}{x^3}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{5\sinh x - 5x(1 + x^2/6)}{\sin(x^5)}$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x\cos x} - e^x}{6x^3}$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - \log(1+x)}{x^{\alpha-2} \sinh x}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

Risposte:

a) 0

b) $\frac{1}{24}$

c) $-\frac{1}{12}$

d) 1 se $\alpha = 3$, $+\infty$ se $\alpha > 3$, 0 se $\alpha < 3$

Es. 9 La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - \sin x & \text{se } x \geq 0 \\ 1 - x - e^x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

quante volte è derivabile in $x = 0$? A quale spazio funzionale $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ appartiene?

[R. f è derivabile 0 volte in $x = 0$. $f \in \mathcal{C}^0$.]

Es. 10 Discutere la continuità della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nel suo dominio.

a)

$$f(x) = \begin{cases} 7^{-1/x^2} + \dfrac{x-1}{2^x - 2} & \text{se } x \neq 0, 1 \\ 1 & \text{se } x = 0 \text{ o } x = 1. \end{cases}$$

[R. $x = 0$ è un punto in cui f è continua. $x = 1$ è un punto di discontinuità eliminabile]

b)

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x^2} & \text{se } x < 0 \\ x \arctan \dfrac{1}{x-1} & \text{se } x \geq 0 \text{ e } x \neq 1 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

[R. $x = 0$ è un punto di infinito. $x = 1$ è un punto di salto]

c)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x-2} - 1}{x-2} + \dfrac{x-2}{x+4} & \text{se } x \neq 2 \text{ e } x \neq -4 \\ 0 & \text{se } x = 2 \\ 1 & \text{se } x = -4; \end{cases}$$

[R. $x = 2$ è un punto di discontinuità eliminabile. $x = -4$ è un punto di infinito]

d)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{\sin^2(x+1)}{x+1} & \text{se } x \neq 0 \text{ e } x \neq -1 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ -2 & \text{se } x = -1; \end{cases}$$

[R. $x = -1$ è un punto di discontinuità eliminabile. $x = 0$ è un punto di infinito]

e)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - cos(x^2 - 3)}{(x^2 - 3)^2} + 2^{1/(x-1)} & \text{se } x \neq \pm\sqrt{3} \text{ e } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = \pm\sqrt{3} \\ 0 & \text{se } x = 1; \end{cases}$$

[R. $x = \pm\sqrt{3}$ sono punti di discontinuità eliminabile. $x = 1$ è un punto di infinito]

f)

$$f(x)=\begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi}{2x+3}\right)+7\dfrac{\arctan(x+1)}{x+1} & \text{se } x\neq -\frac{3}{2} \text{ e } x\neq -1\\ 1 & \text{se } x=-\frac{3}{2}\\ 7 & \text{se } x=-1;\end{cases}$$

[R. $x=-3/2$ è punto di discontinuità di seconda specie. $x=-1$ è un punto in cui f è continua]

Es. 11 Discutere la derivabilità della funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

a) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{(x-3)^2}}{1-3\sqrt[3]{(x-3)}}$ **b)** $f(x)=|3x^3-4x^2+\pi|$

c) $f(x)=e^x((x-3)^2-|x-3|-4)$ **d)** $f(x)=x^2|\log(3x)|$

e) $f(x)=|(x-4)\arctan(x-4)|$ **f)** $f(x)=\sqrt[3]{\log^2|x-3|}$

g) $f(x)=(x-4)\log^2(x-4)$ **h)** $f(x)=\sqrt{e^{3x}-3x+1}$

i)

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$$

j)

$$f(x)=\begin{cases} x^2\log|x| & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$$

Risposte.

a) $\text{dom}f=\mathbb{R}\setminus\{82/27\}$. $\text{dom}f'$=$\text{dom}f\setminus\{3\}$. $x=3$ è punto a tangente verticale.

b) $\text{dom}f=\mathbb{R}$. $\text{dom}f'$=$\text{dom}f\setminus\{\alpha\}$, dove α è l'unico zero di f. $x=\alpha$ è punto angoloso.

c) $\text{dom}f=\mathbb{R}$. $\text{dom}f'$=$\text{dom}f\setminus\{3\}$. $x=3$ è punto angoloso.

d) $\text{dom}f=\mathbb{R}^+$. $\text{dom}f'$=$\text{dom}f\setminus\{1/3\}$. $x=1/3$ è punto angoloso.

e) $\text{dom}f=\mathbb{R}$. $\text{dom}f'$=$\text{dom}f$. Non esistono punti di non derivabilità.

f) $\text{dom}f=\mathbb{R}\setminus\{3\}$. $\text{dom}f'$=$\text{dom}f\setminus\{2,4\}$. $x=2$ e $x=4$ sono punti di cuspide.

g) $\text{dom}f=(4,+\infty)$. $\text{dom}f'$=$\text{dom}f$. Non esistono punti di non derivabilità.

h) $\text{dom}f=\mathbb{R}$. $\text{dom}f'$=$\text{dom}f$. Non esistono punti di non derivabilità.

i) $\text{dom}f=\mathbb{R}$. $\text{dom}f'$=$\text{dom}f$. Non esistono punti di non derivabilità (si applica il teorema del limite della derivata).

j) dom$f = \mathbb{R}$. domf'=dom$f$. Non esistono punti di non derivabilità (si applica il teorema del limite della derivata).

Es. 12 Dire per quale valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni sono derivabili in $\mathbb{R}$ e dire che tipo di non derivabilità si ha altrimenti.

a)

$$f(x) = \begin{cases} x^3\alpha & \text{se } x \geq 0 \\ 2x^2 \log(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

[R. f è derivabile $\forall \alpha \in \mathbb{R}$]

b)

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{3\alpha} \cos(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

[R. f è derivabile $\forall \alpha > 1/3$]

Svolgimento.
Anzi tutto ci si chiede per quali valori di α la funzione è continua in $x = 0$. Si calcolano $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ e si impone che siano uguali a 0:
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ solo se $\alpha > 0$, altrimenti non esistono i limiti (per l'oscillazione di $\cos(1/x)$.

A questo punto si calcolano la derivata destra e sinistra in $x = 0$ con la definizione:

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|^{3\alpha}\cos(1/x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} |x|^{3\alpha-1}\cos(1/x)$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|^{3\alpha}\cos(1/x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} |x|^{3\alpha-1}\cos(1/x).$$

I due limiti sono uguali (e uguali a zero) solo se l'esponente di $|x|$ è positivo, ovvero $\alpha > 1/3$. Quindi f è derivabile in $x = 0$ per $\alpha > 1/3$.
N.B. Attenzione che in questo caso il teorema del limite della derivata daùna risposta non esaustiva. Infatti il teorema del limite della derivata dice: **Teorema** *Sia f una funzione definita e continua in $I(x_0)$ e derivabile in $I(x_0)$ tranne eventualmente in x_0. Se esiste finito $l1 = \lim_{x\to x_0^+} f'(x)$, allora esiste anche la derivata destra $f'_+(x_0)$ in x_0 e si ha $f'_+(x_0) = l1 = \lim_{x\to x_0^+} f'(x)$. Analogamente, se esiste finito $l2 = \lim_{x\to x_0^-} f'(x)$, allora esiste anche la derivata sinistra $f'_-(x_0)$ in x_0 e si ha $f'_-(x_0) = l2 = \lim_{x\to x_0^-} f'(x)$.* La funzione di questo esercizio è tale che $l1$ e $l2$ (per $x_0 = 0$) esistono solo per $\alpha > 2/3$ e il teorema del limite della derivata fornisce una risposta parziale. Per $\alpha \in (1/3, 2/3]$ non esistono $l1$ e $l2$, tuttavia esistono finite le derivate destra e sinistra in $x_0 = 0$ calcolate mediante la definizione (ovvero mediante il limite del rapporto incrementale).

c)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \arctan(|x|^{1-\alpha}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

[R. f è continua in $\mathbb{R}$ per $\alpha > 1$, e derivabile in $\mathbb{R}$ per $\alpha > 2$. Se $1 < \alpha < 2$ il punto $x = 0$ è un punto di tangenza verticale, se $\alpha = 2$ il punto $x = 0$ è un punto angoloso.]

Es. 13 Calcolare i seguenti numeri complessi:

a) $w = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^5$ [R. $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$]

b) $w = (1-i)^9$ [R. $16(1-i)$]

c) $w = \frac{1}{4}(\sqrt{3}+i)^3$ [R. $2i$]

d) $w = \left[6\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)\right]^2$ [R. $-18(1+\sqrt{3}i)$]

e) $w = \left[\frac{i\sqrt{3}-1}{(1+i)^2}\right]^7$ [R. $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$]

f) $w = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ [R. -3]

g) $w = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^{45}$ [R. i]

h) $w = \left(2 + \frac{3}{2}i\right) + \overline{\left(2 + \frac{3}{2}i\right)}$ [R. 4]

i) $w = \frac{\sqrt{3}+i}{9(1-\sqrt{3}i)}$ [R. $\frac{i}{9}$]

j) $w = \frac{1}{4}(5-5i)^4\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$ [R. -5^4]

k) $w = 8(1+i)^3$ [R. $16(-1+i)$]

l) $w = \left(\frac{i-1}{i+1}\right)^6$ [R. -1]

Es. 14 Calcolare in $\mathbb{C}$ tutte le radici, con la loro molteplicità, dell'equazione:

a) $(z^2-5z+6)(z^2+12iz-36) = 0$ [R. $z_1 = 2,\ z_2 = 3,\ z_{3,4} = -6i$]

b) $(2z^2-iz+3)(z-4+4i)^2 = 0$ [R. $z_1 = -i,\ z_2 = 3i/2,\ z_{3,4} = 4-4i$]

c) $(z^3-8)(z-8)^3 = 0$ [R. $z_1 = 2,\ z_2 = (-1+\sqrt{3}i),\ z_3 = (-1-\sqrt{3}i),\ z_{4,5,6} = 8$]

d) $(z^3 - i)(z^2 + 4) = 0$ [R. $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},\ z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},\ z_3 = -i,\ z_{4,5} = \pm 2i$]

Es. 15 Calcolare in $\mathbb{C}$ le radici $n-$sime (n è specificato di volta in volta) dei seguenti numeri complessi:

a) $w = 8\dfrac{\sqrt{3}i - 1}{\sqrt{3} + i} + \dfrac{1}{i}$, con $n = 3$ [R. $z_0 = \sqrt[3]{7}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right), z_1 = \sqrt[3]{7}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right), z_2 = -\sqrt[3]{7}i$]

b) $w = 7(1 + i)^2$, con $n = 3$ [R. $z_0 = \sqrt[3]{14}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right),\ z_1 = \sqrt[3]{14}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right),\ z_2 = -\sqrt[3]{14}i$]

c) $w = (z + 2\overline{z})^2$, dove $z = \frac{3}{2}(\frac{1}{3} - \sqrt{3}i)$, con $n = 4$ [R. $z_0 = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right),\ z_1 = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\ z_2 = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right),\ z_3 = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$]

d) $w = -7\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}$, con $n = 7$. [R. $z_0 = \sqrt[7]{7}e^{i\pi/6},\ z_1 = \sqrt[7]{7}e^{19i\pi/42},\ z_2 = \sqrt[7]{7}e^{31i\pi/42},\ z_3 = \sqrt[7]{7}e^{43i\pi/42},\ z_4 = \sqrt[7]{7}e^{55i\pi/42},\ z_5 = \sqrt[7]{7}e^{67i\pi/42},\ z_6 = \sqrt[7]{7}e^{79i\pi/42}$]

Es. 16 Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che:

a) $\left(\dfrac{9}{|z|^2 + 1} - 1\right)(|z|^2 - 7) \cdot \mathrm{Re}(z - 7iz) = 0$ [R. Siano $x = \mathrm{Re}z$ e $y = \mathrm{Im}z$. Il luogo geometrico è l'insieme $\{z \in \mathbb{C} : x^2 + y^2 = 8 \cup x^2 + y^2 = 7 \cup x + 7y = 0\}$, ovvero l'unione tra due crf ed una retta.]

b) $(|z| - 5) \cdot \mathrm{Im}\left(z^2 - 5iz\right) = 0$ [R. Siano $x = \mathrm{Re}z$ e $y = \mathrm{Im}z$. Il luogo geometrico è l'insieme $\{z \in \mathbb{C} : x^2 + y^2 = 25 \cup x = 0 \cup y = 5/2\}$, ovvero l'unione tra una crf e due rette.]

c) $\left(\overline{z} + i\right)\left(\left|z + i\mathrm{Im}\,(z)\right|^2 - 64\right) = 0$ [R. Siano $x = \mathrm{Re}z$ e $y = \mathrm{Im}z$. Il luogo geometrico è l'insieme $\{z \in \mathbb{C} : x^2 + 4y^2 = 64 \cup z = i\}$, ovvero l'unione tra una ellisse ed un punto.]

d) $\left[7|z|^2 - 2(z + i\overline{z}) \cdot \mathrm{Im}(z)\right] \in \mathbb{R}$ [R. Siano $x = \mathrm{Re}z$ e $y = \mathrm{Im}z$. Il luogo geometrico è l'insieme $\{z \in \mathbb{C} : y = 0 \cup y + x = 0\}$, ovvero l'unione tra due rette.]

e) $(|z - 3i| - 5)\,(z - i) = 0$ [R. Siano $x = \mathrm{Re}z$ e $y = \mathrm{Im}z$. Il luogo geometrico è l'insieme $\{z \in \mathbb{C} : x^2 + y^2 - 6y = 16 \cup z = i\}$, ovvero l'unione tra una crf ed un punto.]

f) $\mathrm{Re}\left(6z\,|z|^2 + |z|\,\overline{z}^{\,2} - 6\overline{z}\,z^2\right) = 0$ [R. Siano $x = \mathrm{Re}z$ e $y = \mathrm{Im}z$. Il luogo geometrico è l'insieme $\{z \in \mathbb{C} : x + y = 0 \cup x - y = 0\}$, ovvero l'unione tra due rette.]

g) $\mathrm{Im}\left(z^2 + 7iz + 2|z|^2\right) = 0$ [R. Siano $x = \mathrm{Re}z$ e $y = \mathrm{Im}z$. Il luogo geometrico è l'insieme $\{z \in \mathbb{C} : x = 0 \cup y = -7/2\}$, ovvero l'unione tra due rette.]

h) $\left(i|z|^2 + 2iz + \overline{z} + 2\right) \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ [R. Siano $x = \mathrm{Re}z$ e $y = \mathrm{Im}z$. Il luogo geometrico è l'insieme $\{z \in \mathbb{C} : x^2 + y^2 + 2x - y = 0 \cap x - 2y + 2 \geq 0\}$, (ovvero una semi circonferenza).]

i) $2i(z^2 + |z|^2) = (z + \overline{z})^2$ [R. Siano $x = \mathrm{Re}z$ e $y = \mathrm{Im}z$. Il luogo geometrico è l'insieme $\{z \in \mathbb{C} : x = 0\}$, ovvero la retta immaginaria.]

j) $\dfrac{|z|^2 + 3\overline{z}}{1+i} \in \mathbb{R}$ [R. Siano $x = \mathrm{Re}z$ e $y = \mathrm{Im}z$. Il luogo geometrico è l'insieme $\{z \in \mathbb{C} : x^2 + y^2 + 3x + 3y = 0\}$, ovvero una crf .]