Esercizi di Analisi Matematica 1 utili per la preparazione all'esame scritto.
File con soluzioni.

Es. 1

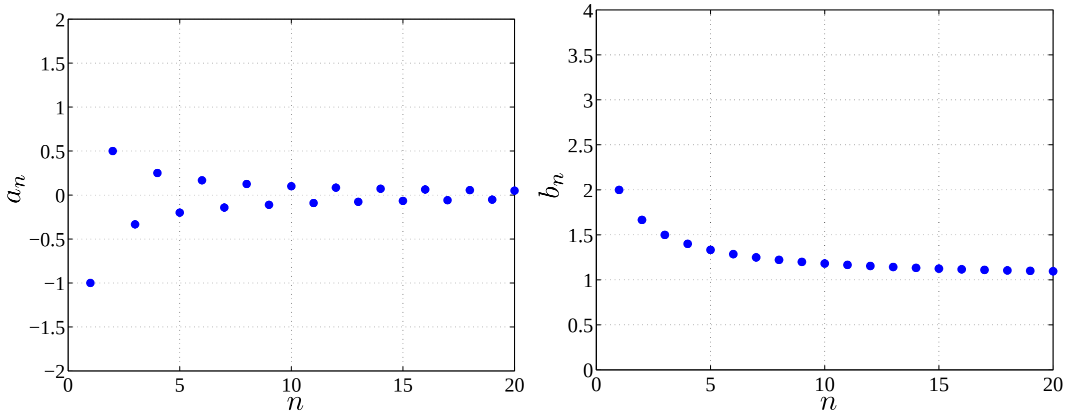

Figura 1

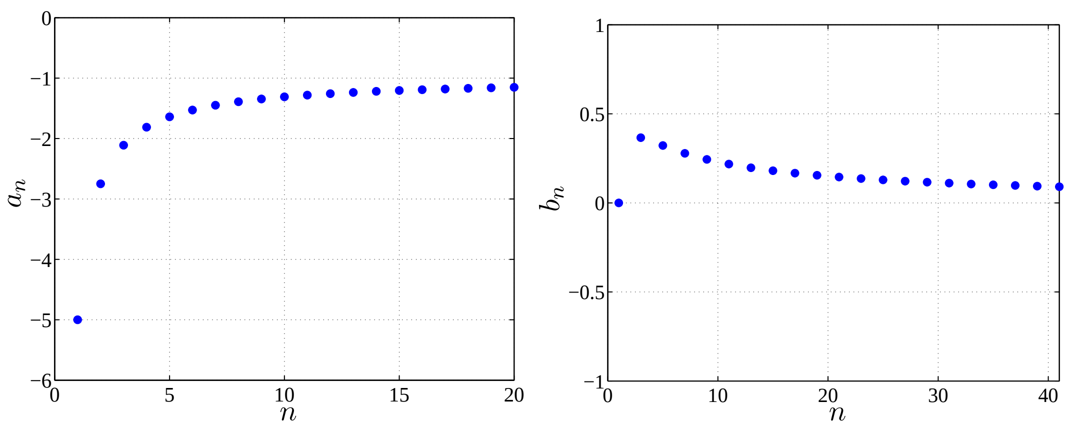

Figura 2

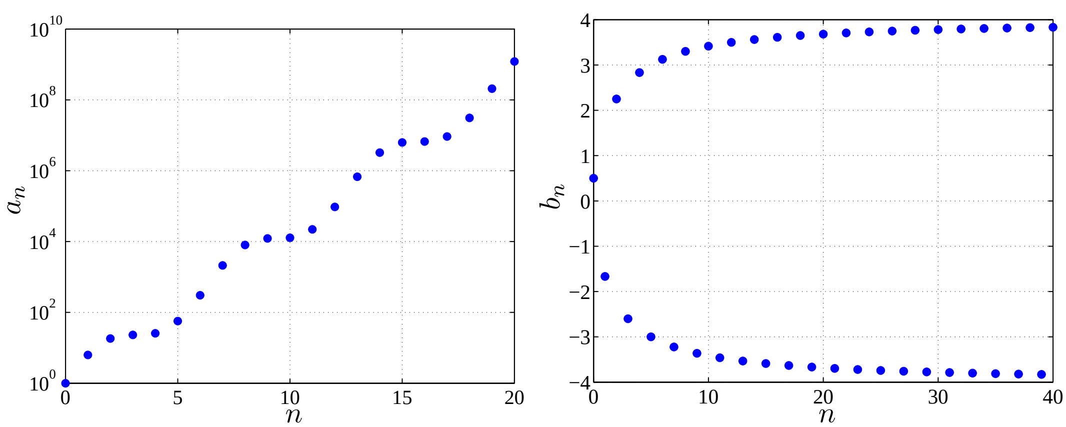

Figura 3

Successione a_n della figura 1.
La successione è limitata in quanto im$a_n \subset [-1, 1/2]$; non è monotona, ma oscillante; è convergente e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Successione b_n della figura 1.
La successione è limitata in quanto im$a_n \subset (1, 2]$; è monotona decrescente; è convergente e $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.
Successione a_n della figura 2.
La successione è limitata in quanto im$a_n \subset [-5, -1)$; è monotona crescente; è convergente e $\lim_{n\to\infty} a_n = -1$.
Successione b_n della figura 2.
La successione è limitata in quanto im$a_n \subset [0, 1/2)$; è monotona decrescente definitivamente, ovvero per $n \geq 3$; è convergente e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Successione a_n della figura 3.
La successione non è limitata in quanto im$a_n \subset [1, +\infty)$; è monotona crescente; è divergente e $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.
Successione b_n della figura 3.
La successione è limitata in quanto im$a_n \subset (-4, 4)$; non è monotona, ma oscillante; è indeterminata.

Es. 2

a) $a_n = \dfrac{1}{4}\log\left[\tan\left(\dfrac{n+3}{n+4}\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)\right],\ n \in \mathbb{Z}^+$

è monotona crescente, divergente, non limitata. $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

$\inf a_n = \min a_n = \dfrac{1}{4}\log\left(\tan\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)\right)$, $\sup a_n = +\infty$.

b) $a_n = 2\cos(n\pi) + \sin\left(4^{-n}\frac{\pi}{2}\right),\ n \in \mathbb{N}$

non è monotona, ma oscillante, indeterminata, limitata. $\inf a_n = -2$, $\sup a_n = \max a_n = 3$.

c) $a_n = (-1)^n[\log(3n) - \log(n+3)],\ n \in \mathbb{Z}^+$

non è monotona, ma oscillante, indeterminata, limitata. $\inf a_n = -\log(3)$, $\sup a_n = \log(3)$.

d) $a_n = (-1)^n e^{\frac{n+2}{n}},\ n \in \mathbb{Z}^+$

non è monotona, ma oscillante, indeterminata, limitata. $\inf a_n = \min a_n = -e^3$, $\sup a_n = \max a_n = e^2$.

e) $a_n = \sqrt{n+18},\ n \in \mathbb{N}$

è monotona crescente, divergente, limitata inferiormente, ma non limitata superiormente. $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. $\inf a_n = \min a_n = \sqrt{18}$, $\sup a_n = +\infty$.

f) $a_n = \cos\left(\arctan\left(\dfrac{n^2+1}{n+1}\right)\right),\ n \in \mathbb{N}$

è monotona decrescente, convergente, limitata. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. $\inf a_n = 0$, $\sup a_n = \max a_n = \sqrt{2}/2$.

g) $a_n = \dfrac{n+1}{n^2+1}$, $n \in \mathbb{N}$

è monotona decrescente, convergente, limitata. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. $\inf a_n = 0$, $\sup a_n = \max a_n = 1$.

h) $a_n = \arctan(-n^n)$, $n \in \mathbb{N}^+$

è monotona decrescente, convergente, limitata. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\pi/2$. $\inf a_n = -\pi/2$, $\sup a_n = \max a_n = -\pi/4$.

i) $a_n = \arctan((-n)^n)$, $n \in \mathbb{N}^+$

non è monotona, ma oscillante, indeterminata, limitata. $\inf a_n = -\pi/2$, $\sup a_n = \pi/2$.

j) $a_n = \sin(e^n) + 2$, $n \in \mathbb{N}$

non è monotona, ma oscillante, indeterminata, limitata. $\inf a_n = 1$, $\sup a_n = 3$.

k) $a_n = \log(3^n) \cdot 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$

è monotona decrescente definitivamente, ovvero per $n \geq 1$; è convergente e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, limitata. $\inf a_n = \min a_n = 0$, $\sup a_n = \max a_n = \log(3)/2$.

Es. 3 Calcolare i seguenti limiti di successione:

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n - n!}{(n+1)^n + 7^n \log n} = e^{-1}$.

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^{n+1} + (n+1)^{n+1}}{n^n + 5n!} \sin\frac{\pi}{n} = \pi\,(3+e)$.

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4 \log n - n^4 \log(n+2)}{5n^3 + n^4 \sin\frac{1}{n} + n^5 \sin\frac{1}{n^2}} = -\frac{2}{7}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\log 5^n - \log 3^n}{\sqrt{2n^2+2n} - \sqrt{n^2+3n}} = \log\frac{5}{3} \cdot (\sqrt{2}+1)$.

e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2}\sin(n! + 2n) - \sin\frac{1}{n}}{3\sin\frac{1}{n^2}} \cdot \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{3}$.

f) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2\log(n^n)}{n\log(n+3) + 2^{-n}\cdot\sin(n)} = 2$.

g) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(\sin\frac{1}{n}\right)}{\log(n)} = -1$.

h) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{(4+\sin n)n!} = +\infty$ [sugg. utilizzare il primo teorema del confronto]

i) $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\left(\frac{e^{3n}+e^{\sin n}}{n!+n^4}\right)^{-1} = \nexists.$

j) $\lim_{n\to+\infty}\frac{3\sqrt[n]{n+2}\cdot\log(n^3+2)}{\log((n+3)!)-\log(n!)} = 3$

Es. 4 Calcolare i seguenti limiti di successione al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$:

a) $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+2)\cdot(3\arctan(\sqrt{n})+n^{2\alpha-1})}{n-7}$

Se $\alpha=1/2$, $l=3\pi/2+1$; se $\alpha>1/2$, $l=+\infty$; se $\alpha<1/2$, $l=3\pi/2$.

b) $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+3\log n)^\alpha}{4n^3+4\sqrt{n}}.$

Se $\alpha=3$, $l=1/4$; se $\alpha>3$, $l=+\infty$; se $\alpha<3$, $l=0$.

c) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\log 2^n+(-\frac{1}{3})^n}{5n^{\alpha-1}+\arctan(n^n)}.$

Se $\alpha=2$, $l=(\log 2)/5$; se $\alpha<2$, $l=+\infty$; se $\alpha>2$, $l=0$.

d) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos\left(\frac{7}{n}\right)}{n^\alpha-\sqrt{n^6-3n^4+5}}.$

$\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $l=0$.

e) $\lim_{n\to+\infty}n^{\alpha-2}\left[\sin\frac{8}{n}+\left(1-\cos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)\right].$

Se $\alpha=3$, $l=9$; se $\alpha>3$, $l=+\infty$; se $\alpha<3$, $l=0$.

Es. 5 Per ciascuna delle seguenti funzioni reali $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:
- determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie;
- determinare eventuali asintoti per f e classificarli;
- discutere la continuità di f sul suo dominio.

a)

$$f(x)=\begin{cases}\arctan(x\cdot\log(3|x|)) & \text{se } x\neq 0\\ 1 & \text{se } x=0.\end{cases}$$

dom$f=\mathbb{R}$, f dispari per $x\neq 0$. $y=\pi/2$ asintoto orizzontale destro. $y=-\pi/2$ asintoto orizzontale sinistro. f è continua in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. $x_0=0$ è un punto di discontinuità, in particolare è un punto di discontinuità eliminabile.

b) $f(x)=1-e^{-|x-2|}+\frac{x-2}{e}.$

dom$f=\mathbb{R}$, f non presenta simmetrie. $y=e^{-1}(x+e-2)$ è asintoto obliquo completo. f è continua in tutto il suo dominio.

c) $f(x) = \sqrt[3]{2-x}\ \sqrt[3]{x^2}$.

dom$f = \mathbb{R}$, f non presenta simmetrie. $y = -x + \frac{2}{3}$ è asintoto obliquo completo. La funzione è continua in tutto il suo dominio.

d) $f(x) = (x+7)\log^2(x+7)$.

dom$f = \{x \in \mathbb{R} : \ x > -7\}$, f non presenta simmetrie. f non presenta asintoti. La funzione è continua in tutto il suo dominio.

e) $f(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\log\dfrac{x}{x-2}$.

dom$f = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. f non presenta simmetrie. $y = x/2$ è asintoto obliquo completo. $x = 0$ è asintoto verticale sinistro, $x = 2$ è asintoto verticale destro. La funzione è continua in tutto il suo dominio.

f) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2x}$

dom$f = [-2, 0) \cup (0, 2]$. f è dispari. $x = 0$ è asintoto verticale. La funzione è continua in tutto il suo dominio.

g) $f(x) = \dfrac{1}{\log|x-1|}$

dom$f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$. f non presenta simmetrie rispetto agli assi cartesiani. $x = 0$ e $x = 2$ sono asintoti verticali. La funzione è continua nel suo dominio.

h) $f(x) = \sqrt[3]{x(x-2)^2}$

dom$f = \mathbb{R}$. f non presenta simmetrie. La retta $y = x - 4/3$ è asintoto obliquo. f è continua sul suo dominio.

i) $f(x) = \sqrt{(\log(|x|+1))^2 - 9}$

dom$f = (-\infty, 1 - e^3] \cup [-1 + e^3, +\infty)$. f è pari. Non esistono asintoti. f è continua su tutto il suo dominio.

j)

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{3x^2+1}{x-2}\right) & \text{se } x \neq 2 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

dom$f = \mathbb{R}$. f non presenta simmetrie. La retta $y = \pi/2$ è asintoto orizzontale destro, la retta $y = -\pi/2$ è asintoto orizzontale sinistro. f è continua da sinistra in $x = 2$, ma discontinua da destra in $x = 2$. $x = 2$ è punto di salto.

k) $f(x) = e^{-1/x^2}$

dom$f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. f è pari. La retta $y = 1$ è asintoto orizzontale completo. f è continua sul suo dominio.

Es. 6 Discutere la continuità di ciascuna delle seguenti funzioni $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sul proprio dominio.

a)

$$f(x) = \begin{cases} 3\dfrac{\sqrt{x-7}}{x+1} & \text{se } x \geq 7 \\ \arctan \dfrac{x+7}{x-7} & \text{se } x < 7 \end{cases}$$

f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{7\}$. f è continua da destra in $x = 7$ e $f(7) = 0$, mentre $\lim_{x \to 7^-} f(x) = -\pi/2$, ovvero f non è continua da sinistra in $x = 7$. Il punto $x = 7$ è un punto di discontinuità di tipo salto.

b)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+(x-2)^2)}{(x-2)^2} + (x-2)\dfrac{1-\cos(x+2)}{(x+2)^3} & \text{se } x \neq \pm 2 \\ 1 & \text{se } x = \pm 2 \end{cases}$$

f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Infatti $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2) = 1$, quindi f è continua in $x = 2$. f non è continua in $x = -2$, in quanto $\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^-} f(x) = \infty$. Il punto $x = -2$ è un punto di infinito.

c)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x-3}-1}{(x+1)(x-3)} & \text{se } x \neq -1 \text{ e } x \neq 3 \\ 0 & \text{se } x = -1 \text{ o } x = 3 \end{cases}$$

f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$. f non è continua in $x = -1$: il punto $x = -1$ è un punto di infinito. f non è continua in $x = 3$: il punto $x = 3$ è un punto di discontinuità eliminabile.

d)

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)\exp\left(\sin \dfrac{1}{x^2-1}\right) & \text{se } x \neq \pm 1 \\ 2 & \text{se } x = \pm 1 \end{cases} \qquad [\text{dove } \exp(y) = e^y]$$

f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. f non è continua in $x = -1$: il punto $x = -1$ è un punto di discontinuità di seconda specie. f non è continua in $x = 1$: il punto $x = 1$ è un punto di discontinuità eliminabile.

e)

$$f(x) = \begin{cases} \log|x-2| + 3\dfrac{e^{x-1}-1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \text{ e } x \neq 2 \\ -1 & \text{se } x = 1 \text{ o } x = 2 \end{cases}$$

f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$. f non è continua in $x = 1$: il punto $x = 1$ è un punto di discontinuità eliminabile. f non è continua in $x = 2$: il punto $x = 2$ è un punto di infinito.

Es. 7 Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ ognuna delle seguenti funzioni $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua in tutto il suo dominio.

a)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x^2)}{x^4+1} & \text{se } x \geq 0 \\ \alpha\dfrac{1-\cos x^2}{x^4} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

In $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ f è continua $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, mentre in $x = 0$, f è continua solo per $\alpha = 2$. Se $\alpha \neq 2$ si ha un punto di salto.

b)

$$f(x) = \begin{cases} 2(1+\sqrt{x})^{1/\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{\alpha+3x}{3-x^2} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

In $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ f è continua $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, mentre in $x = 0$, f è continua solo per $\alpha = 6e$. Se $\alpha \neq 6e$ si ha un punto di salto.

c)

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)\exp\left(\dfrac{2}{\log(x+2)}\right) & \text{se } x > -2 \\ \alpha x^2 + \dfrac{1}{5}\log(x+3) & \text{se } -3 < x \leq -2 \end{cases}$$

In $\text{dom} f \setminus \{-2\}$ f è continua $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, mentre in $x = -2$, f è continua solo per $\alpha = 0$. Se $\alpha \neq 0$ si ha un punto di salto.

Es. 8 Calcolare i seguenti limiti di funzioni:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{|x-\pi|} = \nexists$: $\displaystyle\lim_{x\to\pi^-} \frac{\sin x}{|x-\pi|} = 1$, $\displaystyle\lim_{x\to\pi^+} \frac{\sin x}{|x-\pi|} = -1$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-1}{\tan x} = 1$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\log(1+\log x)}{\log x} = 1$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2^x-\log(x)}{e^{2x}-x^{10}+\sin(x)} = 0$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{1-\cos(x-2)}{(x-2)\cdot\sin(x-2)} = \frac{1}{2}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\log x \cdot \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right)}{\sin(2(x-1))} = \nexists$:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\log x \cdot \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right)}{\sin(2(x-1))} = -\frac{\pi}{4}, \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{\log x \cdot \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right)}{\sin(2(x-1))} = \frac{\pi}{4}.$$

Es. 9 Sia a_n una successione infinitesima, utilizzando alcuni limiti fondamentali per le funzioni, calcolare i seguenti limiti di successione:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{e^{a_n}-1}{3a_n} = \frac{1}{3}$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1-cos(a_n)}{(a_n)^2} = \frac{1}{2}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(a_n)}{\sqrt{a_n}} = 0$ d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1-cos(a_n)}{a_n\sin(a_n)} = \frac{1}{2}$

e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{1/a_n} = e$ f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{e^{a_n}-1}{3\sin(a_n)} = \frac{1}{3}$