Esercizi su domini di funzioni reali di variabile reale e disequazioni, utili per la preparazione alla prima prova intermedia

1. Si consideri la funzione $f\colon \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{16 - x^4}{8x^3} e^{-\left(\frac{x^2}{16} + \frac{1}{x^2}\right)}$.
   (a) Determinare il dominio della funzione. $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
   (b) Determinare per quali $x \in \mathrm{dom}(f)$ si ha $f(x) \geqslant 0$. $f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -2 \vee 0 < x \leqslant 2$

2. Si consideri la funzione $f\colon \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\sqrt{2} - x\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}$.
   (a) Determinare il dominio della funzione. $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$
   (b) Determinare per quali $x \in \mathrm{dom}(f)$ si ha $f(x) \geqslant 0$. $f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 1$

3. Si consideri la funzione $f\colon \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} -\cos x & \text{se } -2\pi \leqslant x < 0 \\ 3(3x-2)e^{1-3x} & \text{se } x \geqslant 0. \end{cases}$
   (a) Determinare il dominio della funzione. $\mathrm{dom}(f) = [-2\pi, +\infty)$
   (b) Determinare per quali $x \in \mathrm{dom}(f)$ si ha $f(x) \geqslant 0$. $f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{2} \vee x \geqslant \frac{2}{3}$

4. Si consideri la funzione $f\colon \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{e^{|x|}}{e^{|x|}-1}\dfrac{x}{|x|} - 2e^{-x}$.
   (a) Determinare il dominio della funzione. $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
   (b) Determinare per quali $x \in \mathrm{dom}(f)$ si ha $f(x) \leqslant 0$. $f(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x < 0$

5. Si consideri la funzione $f\colon \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{(e^{(x-1)}-1)e^{(x-1)} + (x-1)}{\sqrt{(e^x-1)^2 + (x-1)^2}}$.
   (a) Determinare il dominio della funzione. $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$
   (b) Determinare per quali $x \in \mathrm{dom}(f)$ si ha $f(x) \geqslant 0$. $f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$

6. Si consideri la funzione $f\colon \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2 + (x-2)^2}$.
   (a) Determinare il dominio della funzione. $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$
   (b) Determinare per quali $x \in \mathrm{dom}(f)$ si ha $f(x) > 0$. $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

7. Si consideri la funzione $f\colon \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (\log x)^2 - 3\log x + 2$.
   (a) Determinare il dominio della funzione. $\mathrm{dom}(f) = (0, +\infty)$
   (b) Determinare per quali $x \in \mathrm{dom}(f)$ si ha $f(x) \geqslant 0$. $f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 0 < x \leqslant e \vee x \geqslant e^2$

8. Si consideri la funzione $f\colon \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} \log(\log(\log x)) & \text{se } x \geqslant 3 \\ \sqrt{e^3 - \dfrac{1}{e^{2x}}} & \text{se } -1 < x < 3. \end{cases}$
   (a) Determinare il dominio della funzione. $\mathrm{dom}(f) = (-1, +\infty)$

(b) Determinare per quali $x \in \mathrm{dom}(f)$ si ha $f(x) \geqslant 0$. $\qquad f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3 \vee x \geqslant e^e$

9. Si consideri la funzione $f\colon \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{5x^2}{\arctan x + 2} - \dfrac{x^3 - x^4}{\sqrt{2\cos^2 x + 3\sin x - 3}}$.

   Determinare il dominio della funzione.

$$\mathrm{dom}(f) = \left\{x \in \mathbb{R} : \tfrac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \tfrac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

10. Si consideri la funzione $f\colon \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{4}}(|\tan x|)}$.

    (a) Determinare il dominio della funzione.

$$\mathrm{dom}(f) = \left\{x \in \mathbb{R} : -\tfrac{\pi}{4} + k\pi < x < k\pi \vee k\pi < x < \tfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

    (b) Determinare per quali $x \in \mathrm{dom}(f)$ si ha $f(x) \geqslant 0$. $\qquad f(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in \mathrm{dom}(f)$