Esercizi sulle serie numeriche, utili per la preparazione all'esame scritto[1]

Es. 1 Determinare il carattere delle seguenti serie numeriche.

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{n!}$ [conv. ass]

2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+\arctan n}{n^3\log n}$ [div.]

3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$ [div.]

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n+1}}{3^{n+2}n!}$ [conv. ass]

5. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\log(7^n+2)}$ [conv. sempl.]

6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+3}\frac{(\pi/2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ [conv. ass]

7. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(\log n)^7}\sin\left(\frac{n^2}{n^3+1}\right)$ [conv. ass]

8. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{n+1}}{(2n)!}$ [conv. ass]

9. $\displaystyle\sum_{n=7}^{\infty}(-1)^n\frac{\log(n+1)-\log n}{(\log n)^7}$ [conv. ass]

10. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\log\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^7$ [conv.]

Es. 2 Determinare per quali valori del parametro reale α le seguenti serie convergono

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+(\log n)^7}{n^{\alpha+3}\log n}$, con $\alpha\in\mathbb{R}$ [conv. per $\alpha>-1$]

2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(n^7+\sin n)\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, con $\alpha\in\mathbb{R}^+$ [conv. per $\alpha>8$]

3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{e^{1/n}-1}{n^\alpha\log(n^7)}$, con $\alpha\in\mathbb{R}$ [conv. per $\alpha>0$]

[1] I seguenti esercizi sono stati estratti dai temi d'esame di Analisi Matematica 1 assegnati agli studenti del corso di laurea in Ingegneria Edile - Architettura, (prof. Giovanna Bonfanti) negli anni accademici 2005/06, 2006/07.

4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \arctan(\log(n^{7\alpha}+3) - 7\alpha \log n)$, con $\alpha \in \mathbb{R}^+$ [conv. per $\alpha > 1/7$]

I seguenti esercizi si possono svolgere dopo aver studiato gli sviluppi di Taylor.
Es. 3 Calcolare la somma delle serie seguenti:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}n!}$ [$S = \frac{2}{9}(e^{-2/3} - 1)$]

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+3} \frac{(\pi/2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ [$S = -1$]

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4^{n+1}}{(2n)!}$ [$S = 4(\cos 2 - 1)$]