Esercizi su serie numeriche, integrali ed equazioni differenziali utili per la preparazione all'esame scritto[1]

Es. 1 Determinare il carattere delle seguenti serie numeriche.

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{n!}$ [conv. ass]

2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+\arctan n}{n^3\log n}$ [div.]

3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$ [div.]

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n+1}}{3^{n+2}n!}$ [conv. ass]

5. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\log(7^n+2)}$ [conv. sempl.]

6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+3}\frac{(\pi/2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ [conv. ass]

7. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(\log n)^7}\sin\left(\frac{n^2}{n^3+1}\right)$ [conv. ass]

8. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{n+1}}{(2n)!}$ [conv. ass]

9. $\displaystyle\sum_{n=7}^{\infty}(-1)^n\frac{\log(n+1)-\log n}{(\log n)^7}$ [conv. ass]

10. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\log\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^7$ [conv.]

11. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{1+\frac{(-1)^n}{n}}{\log n}$ [div.]

Es. 2 Determinare per quali valori del parametro reale α le seguenti serie convergono

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+(\log n)^7}{n^{\alpha+3}\log n}$, con $\alpha\in\mathbb{R}$ [conv. per $\alpha>-1$]

[1] Alcuni dei seguenti esercizi sono stati estratti dai temi d'esame di Analisi Matematica 1 assegnati agli studenti del corso di laurea in Ingegneria Edile - Architettura, (prof. Giovanna Bonfanti) negli anni accademici 2005/06, 2006/07.

2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(n^7+\sin n)\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, con $\alpha\in\mathbb{R}^+$ [conv. per $\alpha>8$]

3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{e^{1/n}-1}{n^\alpha\log(n^7)}$, con $\alpha\in\mathbb{R}$ [conv. per $\alpha>0$]

4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\arctan(\log(n^{7\alpha}+3)-7\alpha\log n)$, con $\alpha\in\mathbb{R}^+$ [conv. per $\alpha>1/7$]

Es. 3 I seguenti esercizi si possono svolgere dopo aver studiato gli sviluppi di Taylor. Calcolare la somma delle serie seguenti:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n+1}}{3^{n+2}n!}$ [$S=\frac{2}{9}(e^{-2/3}-1)$]

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+3}\frac{(\pi/2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ [$S=-1$]

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{n+1}}{(2n)!}$ [$S=4(\cos 2-1)$]

Es. 4 Calcolare i seguenti integrali definiti

1. $\displaystyle\int_1^e\frac{x^3+x^2+2x+1}{x^3+x}dx$ [$e-\frac{\pi}{4}+\arctan(e)$]

2. $\displaystyle\int_0^1 x\arctan(x)dx$ [$\frac{3\pi}{8}-\frac{1}{2}$]

3. $\displaystyle\int_{\log 2}^7\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx$ [$-\frac{4}{3}(e^7-1)^{3/2}+2e^7(e^7-1)^{1/2}-\frac{8}{3}$]

4. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi/2}|x|\cos(|x|+x)dx$ [$\frac{\pi^2-1}{2}$]

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{x}{(x-1)(x^2+1)}dx$ [$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log\left(1-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{4}\log\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)$]

6. $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2}\sqrt{3-4x^2}dx$

   [$\frac{3}{4}\pi$. La primitiva generica è $F(x)=\frac{x}{2}\sqrt{3-4x^2}+\frac{3}{4}\arcsin\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)+c$]

7. Determinare la primitiva $F(x)$ di $f(x)=x\sqrt{2+2x-x^2}$ tale che $F(1)=2\sqrt{3}$

   [$F(x)=-\frac{1}{3}\sqrt{(2+2x-x^2)^3}+\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{2+2x-x^2}+\frac{3}{2}\arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)+3\sqrt{3}$]

8. Determinare la primitiva $F(x)$ di $f(x)=\arctan(\sqrt[3]{2+x})$ tale che $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=\pi$

   [$F(x)=(3+x)\arctan(\sqrt[3]{2+x})-\frac{1}{2}\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt{2+x}+\frac{1}{2}\log\left(1+\sqrt[3]{(x+2)^2}\right)+\frac{\pi}{2}$]

Es. 5 Calcolare i seguenti integrali impropri

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{3}{2+e^x}dx$ $[\frac{3}{2}\log 3]$

2. $\displaystyle\int_0^1 x\log\left|\frac{x}{x-1}\right| dx$ $[\frac{1}{2}]$

Es. 6 Esaminare il comportamento dei seguenti integrali impropri

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x}dx$ [div.]

2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$ [conv.]

3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| dx$ [div.]

4. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{x^2}{x^3+1}\right)}{(\log x)^7}dx$ [conv]

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\log x|^3}{|\sin(\pi x)|^{1/3}}dx$ [conv]

6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\log x|}{|\sin(\pi x)|^2}dx$ [div]

Es. 7 Dire per quali valori del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$ i seguenti integrali impropri convergono

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{|x|^\alpha}dx$ [conv. per $\alpha\in(1,2)$]

2. $\displaystyle\int_0^2 \frac{\sin(x^3)}{x^\alpha(e^x-1)^2}dx$ [conv. per $\alpha<2$]

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x-1)^2}{(x-1)^\alpha\log^4(x)}dx$ [conv. per $\alpha<-1$]

4. $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x^3(e^x-1)^{2\alpha}}dx$ [conv. per $\alpha<-1$]

5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^3\left(\frac{1}{x}\right)}{\left[\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^\alpha}dx$ [conv. per $\alpha<2$]

6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{[\log(2^x+3)]^\alpha}dx$ [conv. per $\alpha>1$]

7. $\displaystyle\int_0^{1/3} \frac{e^{2x}-1-2x}{x^{3\alpha}(1-\cos x)}dx$ [conv. per $\alpha<\frac{1}{3}$]

Es. 8 Calcolare i seguenti limiti

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_1^x e^{3t}\log t dt}{e^{3x}\log(x^4)}$ $\left[\frac{1}{12}\right]$

2. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x\int_0^x \sqrt{1+t^3}dt}{2^{x^2}-1}$ $\left[\frac{1}{\log 2}\right]$

3. $\displaystyle\lim_{x\to2} \frac{(x-2)\int_2^x (e^{(t-2)}-1)dt}{\sin(x-2)^3}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

Es. 9 Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

1.
$$\begin{cases} y' + \dfrac{1}{x}y = 2\log x & \text{per } x > 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$
$$\left[y(x) = x\log x - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2x}\right]$$

2.
$$\begin{cases} y'' - 6y' + y = e^{5x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \frac{5}{4} \end{cases}$$
$$\left[y(x) = \tfrac{1}{8}\left(1 - 7\tfrac{\sqrt{2}}{4}\right)e^{(3-2\sqrt{2})x} + \tfrac{1}{8}\left(1 + 7\tfrac{\sqrt{2}}{4}\right)e^{(3+2\sqrt{2})x} - \tfrac{e^{5x}}{4}\right]$$

3.
$$\begin{cases} y' = \dfrac{x^2}{x^2+1}y^2 & \text{per } x > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
$$\left[y(x) = \tfrac{1}{\arctan(x)-x+1}\right]$$

4.
$$\begin{cases} y' - \dfrac{1}{x}y = 3\dfrac{x}{1+x^2} & \text{per } x > 0 \\ y(1) = \dfrac{3}{4}\pi \end{cases}$$
Calcolare $\ell = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x}$
$$\left[y(x) = 3x\arctan(x); \ell = \tfrac{3}{2}\pi\right]$$

5.
$$\begin{cases} y' = 2x^2y + x^2 & \text{per } x < 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
Calcolare $\ell = \displaystyle\lim_{x\to-\infty} y(x)$
$$\left[y(x) = \tfrac{3}{2}e^{2x^3/3} - \tfrac{1}{2}; \ell = -\tfrac{1}{2}\right]$$

6.

$$\begin{cases} y' = 2y + \dfrac{x}{x+1}e^{2x} & \text{per } x > -1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Calcolare $\ell = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{y(x)}{2xe^{2x}}$

$\left[y(x) = e^{2x}(x - \log(x+1));\ \ell = \frac{1}{2}\right]$

7.

$$\begin{cases} y' - 7\sin(x)y = \sin(x) \\ y\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{7} \end{cases}$$

$\left[y(x) = \frac{2}{7}e^{-7\cos(x)} - \frac{1}{7}\right]$

Es. 10 Calcolare la soluzione dell'equazione differenziale $y'' - 4y = 2x$ tale che $y'(0) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{y(x)}{e^{2x}} = 0$

$\left[y(x) = -\frac{1}{4}e^{-2x} - \frac{1}{2}x\right]$

Es. 11. Esercizio svolto sulle funzioni integrali
La funzione $y = f(x)$, definita sull'intervallo $[0, 3]$ ha il grafico rappresentato in Fig. 1. In particolare, la funzione è simmetrica, con una simmetria di tipo dispari, rispetto al punto $B = (1, 0)$, ha una tangenza verticale in B, tangenza orizzontale in $A = (0, -2)$ da destra e in $C = (2, 2)$ da sinistra. Sull'intervallo $(2, 3)$ la funzione è rettilinea. Il punto D ha coordinate $(3, 0)$.
Tracciare con la massima precisione consetita i grafici della funzione derivata $f'(x)$ e della funzione integrale $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.
Svolgimento. Consideriamo dapprima la funzione derivata $y = f'(x)$. Sull'intervallo $[0, 2)$ la funzione $f(x)$ è crescente, quindi la derivata prima sarà positiva. Essendo il punto $x = 0$ un estremo del dominio, si ha per definizione $f'(0) = f'_+(0) = 0$. In $x = 2$ la funzione $f(x)$ presenta un punto angoloso, per cui in $x = 2$ la derivata prima non è definita, tuttavia si ha $f'_-(2) = 0$. Nel punto $x = 1$ la funzione presenta una tangenza verticale, questo vuol dire che la funzione non è derivabile in $x = 1$, in particolare $f'_\pm(2) = \lim_{x\to 2^\pm} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = +\infty$. Il segno è positivo in quanto la funzione $f(x)$ è crescente nell'intorno di $x = 2$. Quindi la funzione $f'(x)$ non è definita in $x = 2$ e la retta $x = 2$ è un asintoto verticale per $f'(x)$.
Sull'intervallo $(2, 3]$, la funzione $f(x)$ è un tratto di retta, se ne può calcolare l'espressione, imponendo il passaggio per i punti $C = (2, 2)$ e $D = (3, 0)$. Si ha $f(x) = -2x + 6$ sull'intervallo $(2, 3]$, quindi $f'(x) = -2$ sull'intervallo $(2, 3]$. Il grafico di $f'(x)$ è rappresentato a sinistra di Fig. 2.
Consideriamo ora la funzione integrale $y = F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Anzitutto osserviamo che, per costruzione, $F(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$. La funzione $f(x)$ è la derivata prima di $F(x)$, quindi dal grafico di $f(x) = F'(x)$ risaliamo a quello di $F(x)$. Sull'intervallo $(0, 1)$ si ha $F'(x) < 0$, quindi $F(x)$ sarà strettamente decrescente. Sull'intervallo $(1, 2)$ si ha $F'(x) > 0$, quindi $F(x)$ sarà

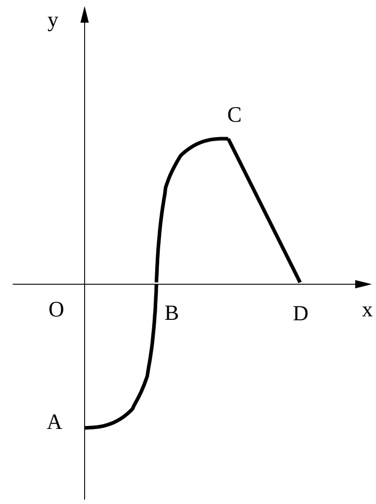

Figure 1: Il grafico di $y = f(x)$ dell'esercizio 1.

strettamente crescente. In $x = 1$, $F'(x) = 0$, quindi $F(x)$ presenta un punto di minimo relativo a tangente orizzontale. Poichè $f(x) = F'(x)$ ammette una simmetria di tipo dispari rispetto al punto C, allora $F(x)$ ammette una simmetria di tipo pari rispetto allo stesso punto C. Questo implica che $F(2) = F(0) = 0$. Sull'intervallo $(2, 3]$ si può calcolare esplicitamente l'espressione della funzione integrale, essendo nota l'espressione di $f(x) = -2x + 6$. La generica primitiva di $f(x)$ è $G(x) = \displaystyle\int(-2t+6)dt = -x^2+6x+c$. Fra tutte le primitive $G(x)$ scegliamo quella che si raccorda con continuità alla funzione integrale già trovata sull'intervallo $[0, 2]$, ovvero vogliamo che $G(2) = 0$ (ricordiamo infatti dal Teorema fondamentale del calcolo integrale che se $f(x)$ è continua allora $F(x)$ è derivabile e questo implica che $F(x)$ è anche continua). Di conseguenza abbiamo $c = -8$. Il grafico della funzione integrale $F(x)$ sull'intervallo $[0, 3]$ è rappresentato a destra di Fig. 2.

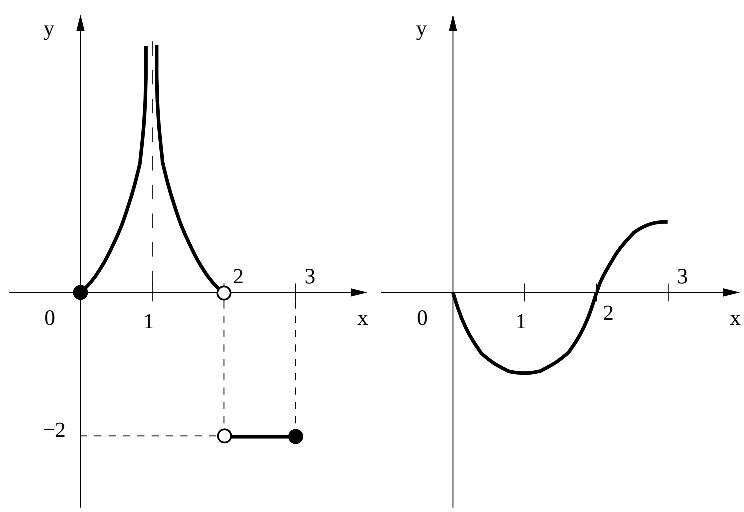

Figure 2: I grafici di $y = f'(x)$ (a sinistra) e di $y = F(x)$ (a destra) dell'esercizio 1.