Esercizi di Analisi Matematica 1, utili per la preparazione all'esame scritto - Seconda parte

Es. 1 Per ognuna delle seguenti figure, dire se la curva nel piano cartesiano è la curva del grafico di una funzione reale a variabile reale e, in caso affermativo, individuare dom$f$, im$f$, eventuali simmetrie; discutere la continuità, la derivabilità; dire se la funzione ammette asintoti verticali, orizzontali, obliqui; dire in quali intervalli la funzione è crescente/decrescente, convessa/concava; individuare eventuali punti di massimo e minimo relativo e assoluto ed eventuali punti flesso.

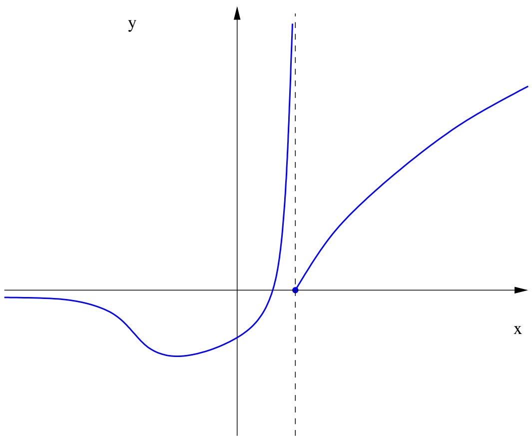

Figura 1

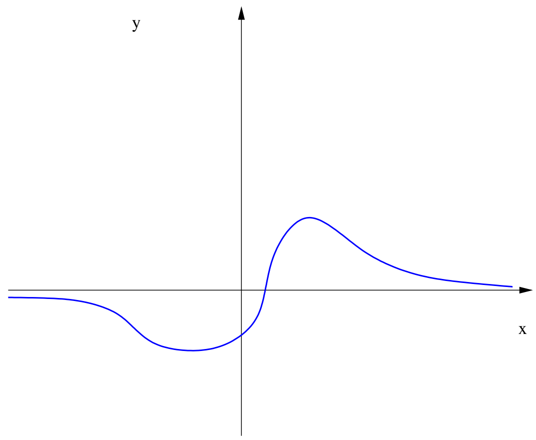

Figura 2

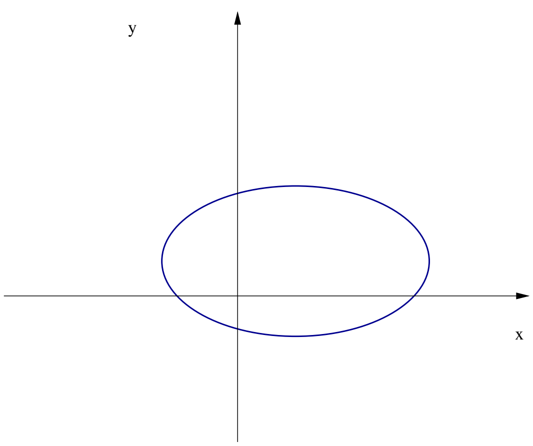

Figura 3

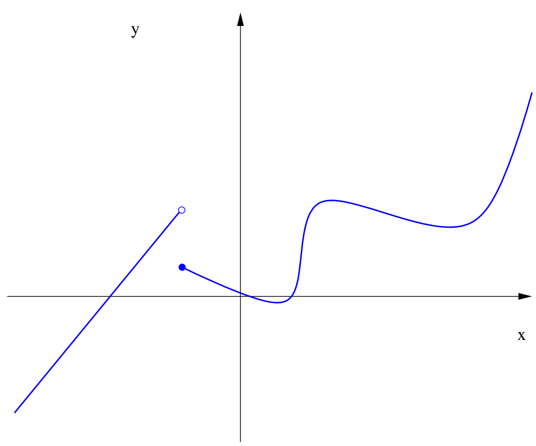

Figura 4

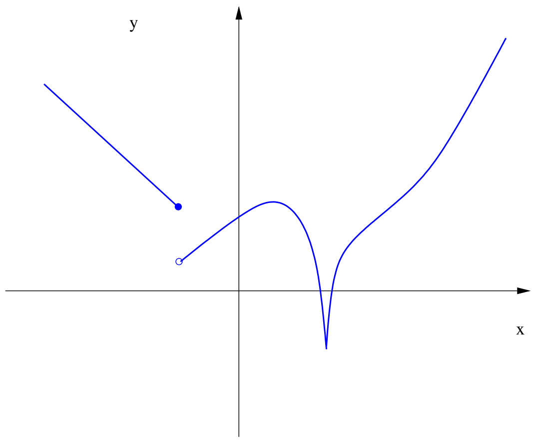

Figura 5

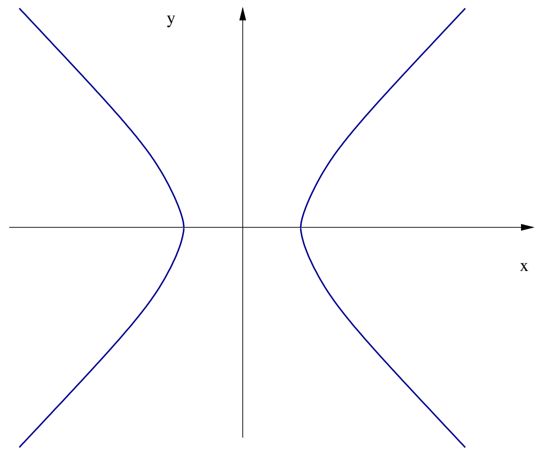

Figura 6

Es. 2 Studiare le seguenti funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^2 + \sqrt[3]{x^4} + 1$

b) $f(x) = x^2 + x - |x| + 1$

c) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x} + 1} + \dfrac{x}{4}$

d) $f(x) = x(x-2) + 4\sqrt[4]{(x+1)^2} - 3$

e)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq -\pi \\ \sin^2(x) & \text{se } -\pi < x \leq 0 \\ x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

f) $f(x) = \sqrt[3]{2-x}\,\sqrt[3]{x^2}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{\log|x-2|}$

h) $f(x) = |\log(x^2+1)|$

i) $f(x) = \sqrt[3]{1 - \sin x}$ sull'intervallo $[-\pi, \pi]$

j) $f(x) = 1 - \sqrt{2}\arctan\dfrac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$

k) $f(x) = \dfrac{1}{\log^2 x} - \dfrac{2}{\log x} + 1$

l) $f(x) = 4|x|e^{-(x^2+3)}$

Es. 3 Calcolare i seguenti limiti di funzione:

a) $\lim_{x\to+\infty} x(e^{2/x}-1)$

b) $\lim_{x\to 0}(1+\sin^2 x)^{1/\log(1+x^2)}$

c) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{e^x-1}}{\sqrt{e^x+1}}$

d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}\left(\frac{\pi}{2}-\arccos\sqrt[4]{x}\right)}{\sin^3(\sqrt[4]{x})}$

e) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\log^2 x}}{x^2}$

f) $\lim_{x\to+\infty}(x^{\sqrt{x}}-2^x)$

g) $\lim_{x\to+\infty}(xe^{-1/x}-(x+2))$

Es. 4 Calcolare lo sviluppo di Taylor di grado 3 delle seguenti funzioni nel punto x_0 a fianco indicato.

a) $f(x)=\sin(x^2)$ in $x_0=\pi/2$

b) $f(x)=\arctan(x)$ in $x_0=1$

c) $f(x)=e^{(x-2)}$ in $x_0=2$

d) $f(x)=x\log(x+1)$ in $x_0=0$

e) $f(x)=\sqrt{2x+3}$ in $x_0=-1$

Es. 5 Determinare per quali valori di x sono definite, per quali continue, per quali derivabili le funzioni reali $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ seguenti:

a)

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{se } |x|\le 1\\ x^2-1 & \text{se } |x|>1\end{cases}$$

b)

$$f(x)=\begin{cases} (x-3)^2\sin\left(\dfrac{1}{x-3}\right) & \text{se } x\neq 3\\ 8 & \text{se } x=3\end{cases}$$

c)

$$f(x)=\begin{cases} |\log(x)| & \text{se } \frac{1}{2}\le x\le e\\ x-5 & \text{se } e<x\le 5\end{cases}$$

d) $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{\log(x^2)}\right) + |x-3|$

Es. 6 Si considerino le funzioni $y = f(x) = e^x$ e $y = g(x) = 4 - e^{\lambda - x}$. Determinare il valore di $\lambda \in \mathbb{R}$ in modo che i grafici delle due funzioni abbiano in un punto comune la stessa tangente. Determinare anche l'ascissa del punto di contatto.

Es. 7 Calcolare le derivate prime e seconde delle seguenti funzioni:

a) $f(x) = \log(x - \sqrt{x^2-1})$ b) $f(x) = \sqrt{1+x}$

c) $f(x) = \log(1+x)$ d) $f(x)\,\arctan = \left(\dfrac{1}{x}\right)$

e) $f(x) = (\sqrt{x})^{x-1}$ f) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x \cos x}$

g) $f(x) = \dfrac{1+3x+5x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}$ h) $f(x) = x^{2x}$

i) $f(x) = e^{\frac{\log x}{x}}$ j) $f(x) = \arcsin(\cos(3x+1))$

k) $f(x) = \tan(\log(x^2))$ l) $f(x) = x\arctan x - \dfrac{1}{2}\log(1+x^2)$

Es. 8 Calcolare i seguenti limiti di funzioni utilizzando gli sviluppi di Taylor:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - (x+1)\tan x}{x^3}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{5\sinh x - 5x(1+x^2/6)}{\sin(x^5)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x\cos x} - e^x}{6x^3}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - \log(1+x)}{x^{\alpha-2}\sinh x}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

Es. 9 La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2 - \sin x & \text{se } x \geq 0 \\ 1 - x - e^x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

quante volte è derivabile in $x = 0$? A quale spazio funzionale $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ appartiene?

Es. 10 Discutere la continuità della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nel suo dominio.

a)

$$f(x) = \begin{cases} 7^{-1/x^2} + \dfrac{x-1}{2^x - 2} & \text{se } x \neq 0, 1 \\ 1 & \text{se } x = 0 \text{ o } x = 1. \end{cases}$$

b)

$$f(x)=\begin{cases} e^{1/x^2} & \text{se } x<0 \\ x\arctan\dfrac{1}{x-1} & \text{se } x\geq 0 \text{ e } x\neq 1 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{se } x=1. \end{cases}$$

c)

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{x-2}-1}{x-2}+\dfrac{x-2}{x+4} & \text{se } x\neq 2 \text{ e } x\neq -4 \\ 0 & \text{se } x=2 \\ 1 & \text{se } x=-4; \end{cases}$$

d)

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{x^3}+\dfrac{\sin^2(x+1)}{x+1} & \text{se } x\neq 0 \text{ e } x\neq -1 \\ 1 & \text{se } x=0 \\ -2 & \text{se } x=-1; \end{cases}$$

e)

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-cos(x^2-3)}{(x^2-3)^2}+2^{1/(x-1)} & \text{se } x\neq \pm\sqrt{3} \text{ e } x\neq 1 \\ 1 & \text{se } x=\pm\sqrt{3} \\ 0 & \text{se } x=1; \end{cases}$$

f)

$$f(x)=\begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi}{2x+3}\right)+7\dfrac{\arctan(x+1)}{x+1} & \text{se } x\neq -\frac{3}{2} \text{ e } x\neq -1 \\ 1 & \text{se } x=-\frac{3}{2} \\ 7 & \text{se } x=-1; \end{cases}$$

Es. 11 Discutere la derivabilità della funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

a) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{(x-3)^2}}{1-3\sqrt[3]{(x-3)}}$ **b)** $f(x)=|3x^3-4x^2+\pi|$

c) $f(x)=e^x((x-3)^2-|x-3|-4)$ **d)** $f(x)=x^2|\log(3x)|$

e) $f(x)=|(x-4)\arctan(x-4)|$ **f)** $f(x)=\sqrt[3]{\log^2|x-3|}$

g) $f(x)=(x-4)\log^2(x-4)$ **h)** $f(x)=\sqrt{e^{3x}-3x+1}$

i)

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$$

j)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \log|x| & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Es. 12 Dire per quale valore del paramatro $\alpha \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni sono derivabili in $\mathbb{R}$ e dire che tipo di non derivabilità si ha altrimenti.

a)

$$f(x) = \begin{cases} x^3\alpha & \text{se } x \geq 0 \\ 2x^2 \log(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{3\alpha} \cos(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \arctan(|x|^{1-\alpha}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Es. 13 Calcolare i seguenti numeri complessi:

a) $w = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^5$

b) $w = (1-i)^9$

c) $w = \frac{1}{4}(\sqrt{3}+i)^3$

d) $w = \left[6\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)\right]^2$

e) $w = \left[\frac{i\sqrt{3}-1}{(1+i)^2}\right]^7$

f) $w = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

g) $w = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^{45}$

h) $w = \left(2 + \frac{3}{2}i\right) + \overline{\left(2 + \frac{3}{2}i\right)}$

i) $w = \frac{\sqrt{3} + i}{9(1 - \sqrt{3}i)}$

j) $w = \frac{1}{4}(5 - 5i)^4 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$

k) $w = 8(1 + i)^3$

l) $w = \left(\frac{i - 1}{i + 1}\right)^6$

Es. 14 Calcolare in $\mathbb{C}$ tutte le radici, con la loro molteplicità, dell'equazione:

a) $(z^2 - 5z + 6)(z^2 + 12iz - 36) = 0$

b) $(2z^2 - iz + 3)(z - 4 + 4i)^2 = 0$

c) $(z^3 - 8)(z - 8)^3 = 0$

d) $(z^3 - i)(z^2 + 4) = 0$

Es. 15 Calcolare in $\mathbb{C}$ le radici $n-$sime (n è specificato di volta in volta) dei seguenti numeri complessi:

a) $w = 8\frac{\sqrt{3}i - 1}{\sqrt{3} + i} + \frac{1}{i}$, con $n = 3$

b) $w = 7(1 + i)^2$, con $n = 3$

c) $w = (z + 2\overline{z})^2$, dove $z = \frac{3}{2}(\frac{1}{3} - \sqrt{3}i)$, con $n = 4$

d) $w = -7\frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}$, con $n = 7$.

Es. 16 Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che:

a) $\left(\frac{9}{|z|^2 + 1} - 1\right)(|z|^2 - 7) \cdot \text{Re}(z - 7iz) = 0$

b) $(|z| - 5) \cdot \text{Im}\left(z^2 - 5iz\right) = 0$

c) $\left(\overline{z} + i\right)\left(\left|z + i\text{Im}\,(z)\right|^2 - 64\right) = 0$

d) $\left[7|z|^2 - 2(z + i\overline{z}) \cdot \text{Im}(z)\right] \in \mathbb{R}$

e) $(|z-3i|-5)\,(z-i)=0$

f) $\mathrm{Re}\left(6z\,|z|^2+|z|\,\overline{z}^{\,2}-6\overline{z}\,z^2\right)=0$

g) $\mathrm{Im}\left(z^2+7iz+2|z|^2\right)=0$

h) $\left(i|z|^2+2iz+\overline{z}+2\right)\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$

i) $2i(z^2+|z|^2)=(z+\overline{z})^2$

j) $\dfrac{|z|^2+3\overline{z}}{1+i}\in\mathbb{R}$