

Esercizi di Analisi Matematica 1, utili per la preparazione all'esame scritto

Es. 1 Analizzare il comportamento delle successioni il cui grafico è rappresentato nelle figure sotto riportate, ovvero: dire se la successione è limitata o meno, se è monotona crescente, monotona decrescente o oscillante; se è convergente, divergente o indeterminata.

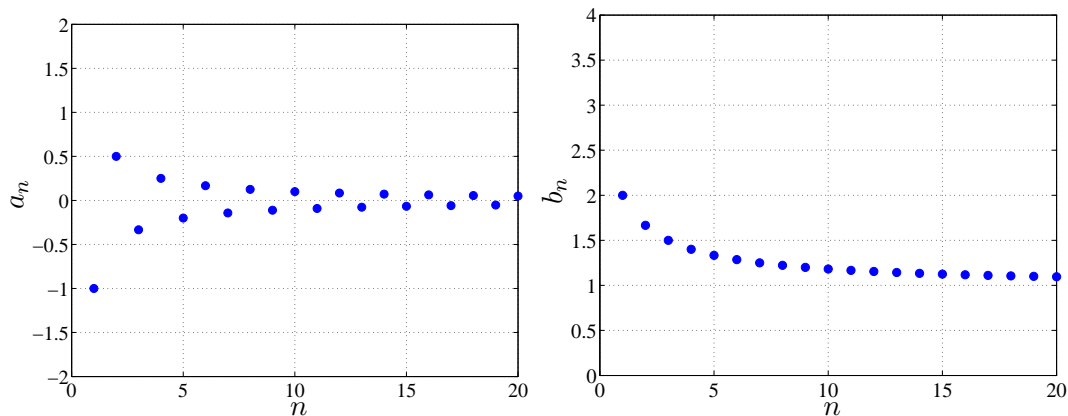


Figura 1

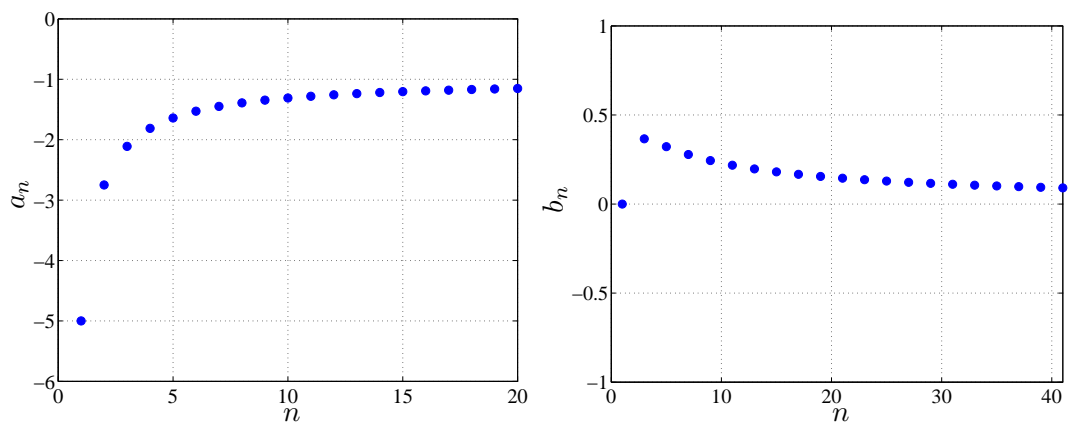


Figura 2

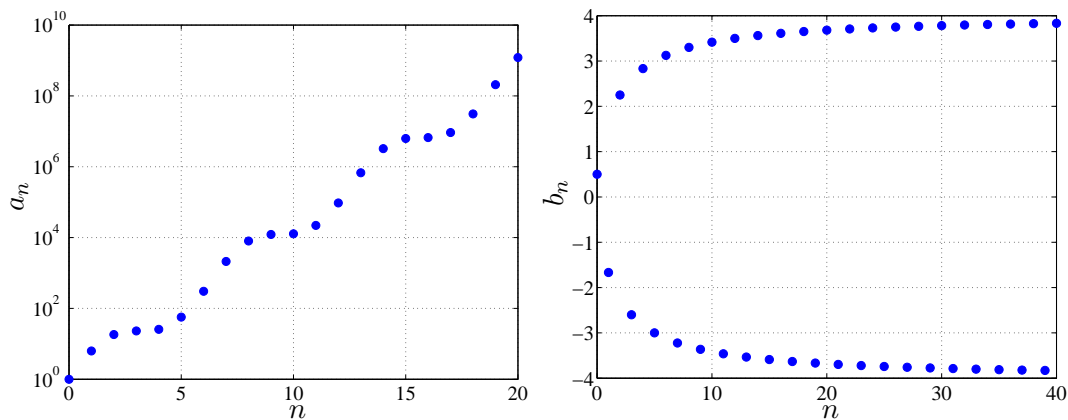


Figura 3

Es. 2 Analizzare la successione a_n , ovvero dire se è limitata o meno, se è monotona crescente, monotona decrescente o oscillante; se è convergente, divergente o indeterminata e, qualora esista, calcolarne il limite. Calcolare l'insieme $A = \text{ima}_n$ (insieme immagine della successione a_n), determinare $\inf A$, $\sup A$ ed eventualmente $\min A$, $\max A$.

a) $a_n = \frac{1}{4} \log \left[\tan \left(\frac{n+3}{n+4} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right], n \in \mathbb{Z}^+$

b) $a_n = 2 \cos(n\pi) + \sin \left(4^{-n} \frac{\pi}{2} \right), n \in \mathbb{N}$

c) $a_n = (-1)^n [\log(3n) - \log(n+3)], n \in \mathbb{Z}^+$

d) $a_n = (-1)^n e^{\frac{n+2}{n}}, n \in \mathbb{Z}^+$

e) $a_n = \sqrt{n+18}, n \in \mathbb{N}$

f) $a_n = \cos \left(\arctan \left(\frac{n^2+1}{n+1} \right) \right), n \in \mathbb{N}$

g) $a_n = \frac{n+1}{n^2+1}, n \in \mathbb{N}$

h) $a_n = \arctan(-n^n), n \in \mathbb{N}$

i) $a_n = \arctan((-n)^n), n \in \mathbb{N}$

j) $a_n = \sin(e^n) + 2, n \in \mathbb{N}$

k) $a_n = \log(3^n) \cdot 2^{-n}, n \in \mathbb{N}$

Es. 3 Calcolare i seguenti limiti di successione:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n - n!}{(n+1)^n + 7^n \log n}$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^{n+1} + (n+1)^{n+1}}{n^n + 5n!} \sin \frac{\pi}{n}$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 \log n - n^4 \log(n+2)}{5n^3 + n^4 \sin \frac{1}{n} + n^5 \sin \frac{1}{n^2}}$

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log 5^n - \log 3^n}{\sqrt{2n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 + 3n}}$

e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^2} \sin(n! + 2n) - \sin \frac{1}{n}}{3 \sin \frac{1}{n^2}} \cdot \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)$

f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \log(n^n)}{n \log(n+3) + 2^{-n} \cdot \sin(n)}$

g) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \left(\sin \frac{1}{n} \right)}{\log(n)}$

h) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!}{(4 + \sin n)n!}$ [sugg. utilizzare il primo teorema del confronto]

i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \left(\frac{e^{3n} + e^{\sin n}}{n! + n^4} \right)^{-1}$

j) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt[n]{n+2} \cdot \log(n^3 + 2)}{\log((n+3)!) - \log(n!)}$

Es. 4 Calcolare i seguenti limiti di successione al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2) \cdot (3 \arctan(\sqrt{n}) + n^{2\alpha-1})}{n-7}$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+3 \log n)^\alpha}{4n^3 + 4\sqrt{n}}$.

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log 2^n + (-\frac{1}{3})^n}{5n^{\alpha-1} + \arctan(n^n)}$.

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos\left(\frac{7}{n}\right)}{n^\alpha - \sqrt{n^6 - 3n^4 + 5}}$.

e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\alpha-2} \left[\sin \frac{8}{n} + \left(1 - \cos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \right) \right]$.

Es. 5 Per ciascuna delle seguenti funzioni reali $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

- determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie;
- determinare eventuali asintoti per f e classificarli;
- discutere la continuità di f sul suo dominio.

a)

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x \cdot \log(3|x|)) & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

b) $f(x) = 1 - e^{-|x-2|} + \frac{x-2}{e}$.

c) $f(x) = \sqrt[3]{2-x} \sqrt[3]{x^2}$.

d) $f(x) = (x+7) \log^2(x+7)$.

e) $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \log \frac{x}{x-2}$.

f) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\sqrt{4-x^2}}{2x}$

g) $f(x) = \frac{1}{\log|x-1|}$

h) $f(x) = \sqrt[3]{x(x-2)^2}$

i) $f(x) = \sqrt{(\log(|x|+1))^2 - 9}$

j)

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{3x^2+1}{x-2}\right) & \text{se } x \neq 2 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

k) $f(x) = e^{-1/x^2}$

Es. 6 Discutere la continuità di ciascuna delle seguenti funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sul proprio dominio.

a)

$$f(x) = \begin{cases} 3\frac{\sqrt{x-7}}{x+1} & \text{se } x \geq 7 \\ \arctan\frac{x+7}{x-7} & \text{se } x < 7 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+(x-2)^2)}{(x-2)^2} + (x-2)\frac{1-\cos(x+2)}{(x+2)^3} & \text{se } x \neq \pm 2 \\ 1 & \text{se } x = \pm 2 \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x-3} - 1}{(x+1)(x-3)} & \text{se } x \neq -1 \text{ e } x \neq 3 \\ 0 & \text{se } x = -1 \text{ o } x = 3 \end{cases}$$

d)

$$f(x) = \begin{cases} (x-1) \exp\left(\sin\frac{1}{x^2-1}\right) & \text{se } x \neq \pm 1 \\ 2 & \text{se } x = \pm 1 \end{cases} \quad [\text{dove } \exp(y) = e^y]$$

e)

$$f(x) = \begin{cases} \log|x-2| + 3\frac{e^{x-1} - 1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \text{ e } x \neq 2 \\ -1 & \text{se } x = 1 \text{ o } x = 2 \end{cases}$$

Es. 7 Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ ognuna delle seguenti funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in tutto il suo dominio.

a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x^2)}{x^4 + 1} & \text{se } x \geq 0 \\ \alpha \frac{1 - \cos x^2}{x^4} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} 2(1 + \sqrt{x})^{1/\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \\ \frac{\alpha + 3x}{3 - x^2} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} (x + 2) \exp\left(\frac{2}{\log(x + 2)}\right) & \text{se } x > -2 \\ \alpha x^2 + \frac{1}{5} \log(x + 3) & \text{se } -3 < x \leq -2 \end{cases}$$

Es. 8 Calcolare i seguenti limiti di funzioni:

a) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{|x - \pi|}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\tan x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(1 + \log x)}{\log x}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2^x - \log(x)}{e^{2x} - x^{10} + \sin(x)}$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \cos(x - 2)}{(x - 2) \cdot \sin(x - 2)}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x \cdot \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right)}{\sin(2(x-1))}$

Es. 9 Sia a_n una successione infinitesima, utilizzando alcuni limiti fondamentali per le funzioni, calcolare i seguenti limiti di successione:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{a_n} - 1}{3a_n}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(a_n)}{(a_n)^2}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(a_n)}{\sqrt{a_n}}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(a_n)}{a_n \sin(a_n)}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{1/a_n}$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{a_n} - 1}{3 \sin(a_n)}$