

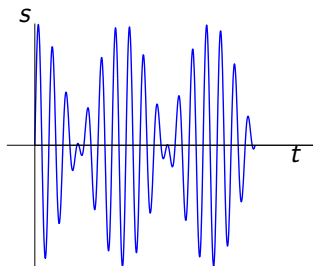
I Numeri complessi - Motivazioni

In

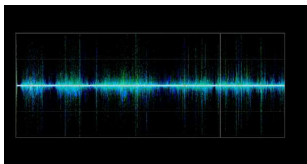
- Telecomunicazioni
- Elettronica
- Informatica
- Teoria dei segnali
- ...

si studiano i **segnali**, cioè delle **grandezze fisiche** dipendenti dal tempo, **matematicamente** esprimibili mediante **funzioni** della variabile **tempo**:

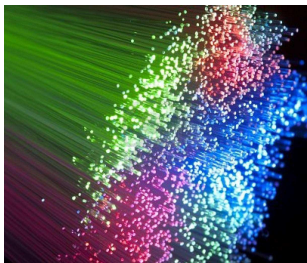
$$s = f(t)$$



Esempi di segnali



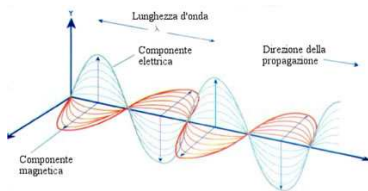
Segnale acustico



Segnali in fibre ottiche



Onde radio (sono onde elettromagnetiche)



Onda elettromagnetica

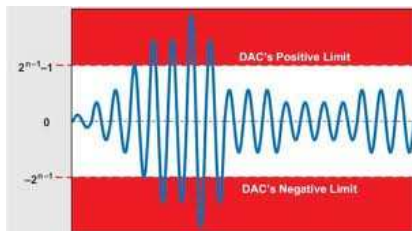
Questi segnali, se sono **periodici**, possono essere rappresentati mediante seni e coseni, o meglio, mediante **serie di Fourier**:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

sono somme di infiniti termini in cui compare un'esponenziale **complessa**:

$$e^{ikt} = \cos(kt) + i \sin(kt)$$

e “*i*” è detta **unità immaginaria** ed è un numero complesso.

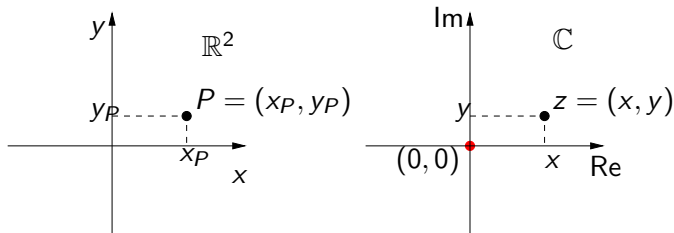


I numeri complessi non servono per misurare grandezze fisiche, ma possono essere considerati uno strumento matematico che in tante situazioni ci aiuta a svolgere i conti in maniera più “semplice”.

Numeri Complessi

Un **numero complesso** z può essere definito come **una coppia ordinata** (x, y) di numeri reali x e y .

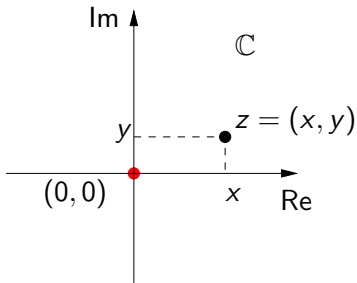
L'insieme dei numeri complessi è denotato con \mathbb{C} e può essere identificato con il piano cartesiano \mathbb{R}^2 .



$x \in \mathbb{R}$ è detto **parte reale di z** e si scrive $x = \operatorname{Re}z$

$y \in \mathbb{R}$ è detto **parte immaginaria di z** e si scrive $y = \operatorname{Im}z$

L'insieme $A = \{z \in \mathbb{C} : z = (x, 0), x \in \mathbb{R}\}$, detto **Asse reale** può essere identificato con la retta dei numeri reali \mathbb{R} , per cui possiamo scrivere $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.



L'insieme $B = \{z \in \mathbb{C} : z = (0, y), y \in \mathbb{R}\}$ è detto **Asse immaginario** e i numeri di B sono detti **immaginari puri**.
Lo **zero** di \mathbb{C} è la coppia $(0, 0)$.

Operazioni in \mathbb{C}

Diciamo che due numeri complessi $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ sono **uguali** se hanno le stesse parti reali e immaginarie, ovvero:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2$$

In particolare, un numero complesso $z_1 = (x_1, y_1)$ è nullo se

$$z_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ e } y_1 = 0$$

La **somma** ed il **prodotto** sono definiti come:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ z_1 z_2 &= (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

In particolare: $(x, 0) + (0, y) = (x, y)$, $(0, 1)(y, 0) = (0, y)$ e quindi

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$$

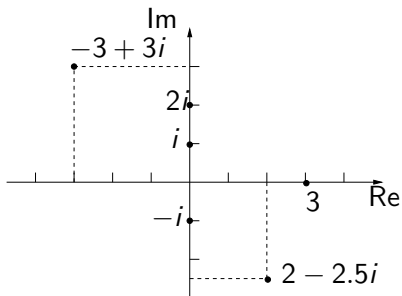
Forma cartesiana di un numero complesso

- 1 Identifichiamo il numero complesso $(x, 0)$ con il numero reale x
- 2 Definiamo $i = (0, 1)$. i è detto **unità immaginaria**
- 3 Dalla relazione $z = (x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$, otteniamo

$$z = x + iy$$

detta **forma algebrica o cartesiana** del numero complesso z .

Osserviamo che $i^2 = ii = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$, ovvero $i \in \mathbb{C}$ è la soluzione dell'equazione $x^2 = -1$ (o $x^2 + 1 = 0$), che invece non ha soluzioni in \mathbb{R} .



Tutti i numeri complessi con **parte immaginaria nulla**

($b = \text{Im}z = 0$) stanno sull'asse reale **Re**. $x = x + 0i$.

Tutti i numeri complessi con **parte reale nulla** ($x = \text{Re}z = 0$)

stanno sull'asse immaginario **Im**. $iy = 0 + iy = yi$.

Operazioni in forma cartesiana

Somma: $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

(sommo tra loro le parti reali e le parti immaginarie)

Es. $(3 + i2) + (-2 + i) = (3 - 2) + i(2 + 1) = 1 + i3 = 1 + 3i$

Sottrazione $(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

(sottraggo tra loro le parti reali e le parti immaginarie)

Es. $(3 + i2) - (-2 + i) = (3 + 2) + i(2 - 1) = 5 + i$

Prodotto $(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2$

$$= x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + (-1)y_1y_2$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

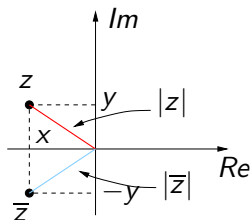
Es. $(3 + i2) \cdot (-2 + i) = (-6 - 2) + i(3 - 4) = -8 - i$

Complesso coniugato e modulo

Def. $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$, il numero complesso $\bar{z} = x - iy$ è detto **complesso coniugato** di z .

Def. $\forall z = \underbrace{\operatorname{Re}(z)}_x + i \underbrace{\operatorname{Im}(z)}_y \in \mathbb{C}$, il numero reale

$|z| := \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$ è detto **modulo** di z .
Rappresenta la distanza del numero complesso dallo zero complesso.

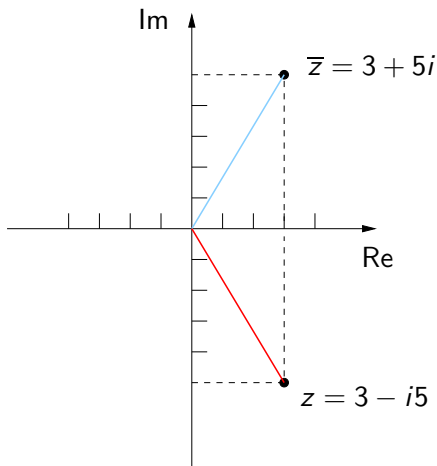


z ed il suo coniugato \bar{z} hanno lo stesso modulo, ovvero:

$$|z| = |\bar{z}|.$$

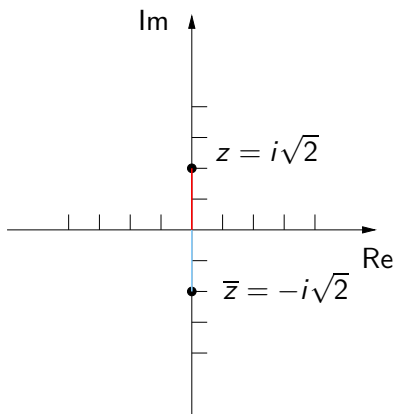
Esempi:

1) $z = 3 - i5$, allora $\bar{z} = 3 + i5$, e $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$



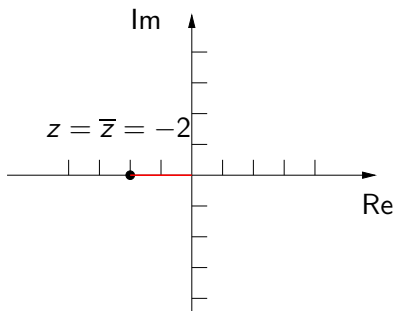
z immaginario puro

2) $z = i\sqrt{2}$, allora $\bar{z} = -i\sqrt{2}$, e $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{2}$



z reale

3) $z = -2$, allora $\bar{z} = -2$, e $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{(-2)^2} = 2$



Inverso di un numero complesso

La **divisione** tra due numeri è il prodotto del primo per l'inverso del secondo.

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$$

Per fare la divisione tra due numeri complessi devo saper costruire l'inverso $\frac{1}{z}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0 + i0$.

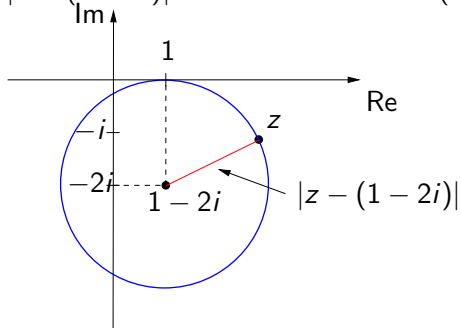
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{x + iy} \cdot \frac{x - iy}{x - iy} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Es.
$$\frac{1}{3 - i2} = \frac{3 + i2}{13}$$

Cosa rappresenta $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - (1 - 2i)| = 2\}$?

$|z|$ è la distanza di z da 0 .

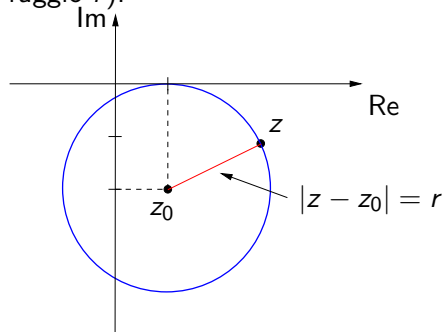
$|z - (1 - 2i)|$ è la distanza di z da $(1 - 2i)$.



A è l'insieme dei punti z la cui distanza da $(1 - 2i)$ è uguale a 2, ovvero è la **circonferenza dei punti $z \in \mathbb{C}$ di centro $z_C = (1 - 2i)$ e raggio $r = 2$.**

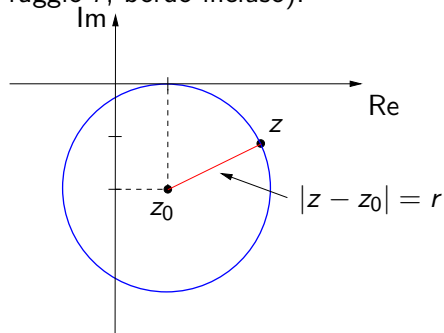
$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$$

Assegnato $z_0 \in \mathbb{C}$, ed assegnato $r \in \mathbb{R}^+$,
l'insieme $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ è l'insieme dei punti del
piano complesso che distano r da z_0 (circonferenza di centro z_0 e
raggio r).



$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$$

Assegnato $z_0 \in \mathbb{C}$, ed assegnato $r \in \mathbb{R}^+$,
l'insieme $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ è l'insieme dei punti del
piano complesso che distano da z_0 al più r (cerchio di centro z_0 e
raggio r , bordo incluso).



Proprietà di modulo e complesso coniugato

$\forall z \in \mathbb{C}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$$|\alpha \cdot z| = |\alpha| \cdot |z|, \quad \operatorname{Re}(\alpha z) = \alpha \operatorname{Re}(z), \quad \operatorname{Im}(\alpha z) = \alpha \operatorname{Im}(z)$$

$$\overline{(\alpha z)} = \alpha \bar{z}$$

$\forall z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$$

$$z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2\operatorname{Re}z$$

$$z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy = 2i\operatorname{Im}z$$

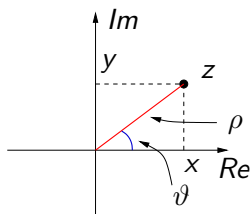
$$\overline{\bar{z}} = z$$

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

Infatti: prendo $z = x + iy$, allora $\bar{z} = x - iy$ e $z = \bar{z}$ se e solo se $x = x$ (sempre vero) e $y = -y$ (vero se e solo se $y = \operatorname{Im}z = 0$), ovvero $z \in \mathbb{R}$.

Forma trigonometrica di $z \in \mathbb{C}$

$\forall z \in \mathbb{C}$ è univocamente individuato mediante 2 parametri: la sua parte reale $\operatorname{Re} z = x$ e la sua parte immaginaria $\operatorname{Im} z = y$.

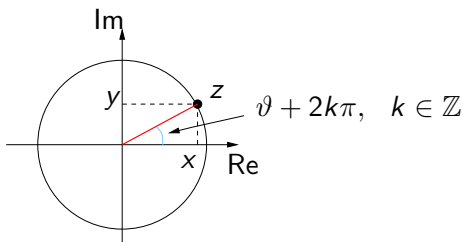


z può essere individuato univocamente anche da altri due parametri:

- $\rho = |z|$ **modulo** di z
- $\vartheta = \arg(z)$ **argomento** di z

ρ e ϑ sono dette anche **coordinate polari** del punto z nel piano complesso.

Se conosco ρ e θ , allora $x = \rho \cos \vartheta$, $y = \rho \sin \vartheta$.

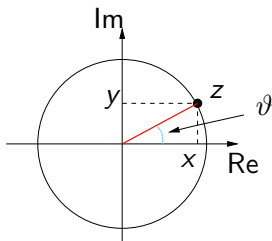


Se conosco x e y , allora $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ e ϑ è calcolabile attraverso l'**arctangente** (pagina successiva).

Esistono **infiniti angoli** che individuano lo **stesso numero complesso** z : $\vartheta, \vartheta + 2\pi, \vartheta + 4\pi, \vartheta - 2\pi, \dots$, in genere $\vartheta + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Se si decide di scegliere $\vartheta \in (-\pi, \pi]$, si pone:

$$\vartheta = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{se } x > 0 \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{se } x < 0, y \geq 0 \\ \arctan(y/x) - \pi & \text{se } x < 0, y < 0 \\ \pi/2 & \text{se } x = 0, y > 0 \\ -\pi/2 & \text{se } x = 0, y < 0 \end{cases}$$



$\arg(0) = \mathbb{R}$, infatti $z = 0 = 0(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$, $\forall \vartheta \in \mathbb{R}$.

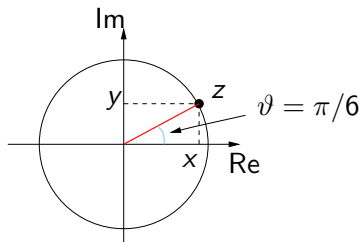
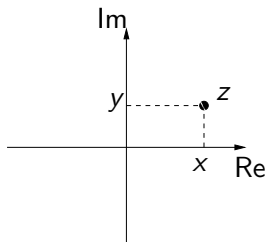
Si ha quindi: $z = x + iy = \rho \cos \vartheta + i\rho \sin \vartheta = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$

$$\begin{aligned} z &= x + iy && \text{forma algebrica} \\ &= \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) && \text{forma trigonometrica} \end{aligned}$$

Esempi.

1) forma cartesiana \rightarrow forma trigonometrica (o polare)

$$\text{Dato } z = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}. \quad \text{Re}z = x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{Im}z = y = \frac{1}{2}.$$



Allora:

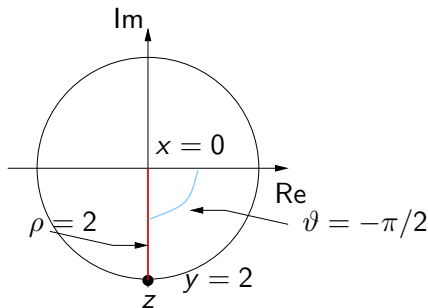
$$\vartheta = \frac{\pi}{6} \text{ e } \rho = \sqrt{3/4 + 1/4} = 1$$

$$\text{Con la regola: } \vartheta = \arctan\left(\frac{1/2}{\sqrt{3}/2}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$$

2) Forma trigonometrica (o polare) \rightarrow forma cartesiana

Sono noti $\rho = 2$ e $\vartheta = -\frac{\pi}{2}$.

$$z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = 2(0 - i) = -2i$$



Esponenziale complesso

$\forall z \in \mathbb{C}$ si vuole definire l'**esponenziale** di z , $e^z \in \mathbb{C}$, in modo da rispettare le proprietà classiche delle potenze.

e è il numero di Eulero (a volte noto come numero di Nepero)
 $e \simeq 2.718\dots$

$\forall z = \underbrace{\operatorname{Re}z}_x + i \underbrace{\operatorname{Im}z}_y \in \mathbb{C}$ si definisce

$$e^z := e^{\operatorname{Re}z}(\cos(\operatorname{Im}z) + i \sin(\operatorname{Im}z)) = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Esempi.

- $e^{(3-i)} = e^3(\cos(-1) + i \sin(-1)) = e^3(\cos(1) - i \sin(1))$
- $e^{-2} = e^{-2}(\cos(0) + i \sin(0))$
- $e^{2i\pi} = e^0(\cos(2\pi) + i \sin(2\pi)) = 1(1 + i0) = 1$
- $e^{i\vartheta} = e^0(\cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta)) = \cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta)$

Formula di Eulero (1707 - 1783)

$$e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}$$

Confrontando la forma trigonometrica di un numero complesso $z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ e la formula di Eulero $e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$ si ha

$$z = \rho e^{i\vartheta}$$

detta **forma esponenziale** del numero complesso z .

Oss. Per $\vartheta = \pi$ la formula di Eulero diventa:

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{i\pi} + 1 = 0$$

Proprietà dell'esponenziale in \mathbb{C}

Dato $z = \operatorname{Re}z + i\operatorname{Im}z = x + iy$, l'esponenziale e^z è un numero complesso, lo chiamiamo ad esempio w . Dalla definizione di esponenziale complesso e dalla formula di Eulero abbiamo

$$w = e^z = e^{\operatorname{Re}z}(\cos(\operatorname{Im}z) + i\sin(\operatorname{Im}z)) = e^{\operatorname{Re}z}e^{i\operatorname{Im}z} = \underbrace{e^x}_{\rho} e^{iy}$$

cioè l'esponenziale di z è un numero complesso w il cui **modulo** è $\rho = e^x$ (x è la parte reale di z) ed il cui **argomento** è y (y è la parte immaginaria di z).

Proprietà dell'esponenziale in \mathbb{C}

Teorema.

- 1 $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- 2 $e^z \cdot e^{-z} = 1$
- 3 $|e^{i\vartheta}| = \sqrt{\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta} = 1 \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}$
- 4 $|e^z| = e^{\operatorname{Re}z}$
- 5 $(e^z)^n = e^{nz} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$
- 6 $e^{z+2k\pi i} = e^z \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
- 7 $\overline{e^{i\vartheta}} = e^{-i\vartheta}$
- 8 $e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Dimostrazione di 3. $|e^{i\vartheta}| = 1, \forall \vartheta \in \mathbb{R}$

$$|e^{i\vartheta}| = |\cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta)| = \sqrt{\cos^2(\vartheta) + \sin^2(\vartheta)} = 1.$$

Poichè ϑ è un numero qualsiasi in \mathbb{R} , allora $|e^{iy}| = 1, \forall y \in \mathbb{R}$,
 $|e^{ix}| = 1, \forall x \in \mathbb{R}$,

Dimostrazione di 4. $|e^z| = e^{\operatorname{Re}z}$

Per definizione di esponenziale di un numero complesso si ha:

$$e^z = e^{\operatorname{Re}z}(\cos(\operatorname{Im}z) + i \sin(\operatorname{Im}z)), \text{ quindi } |e^z| = |e^{\operatorname{Re}z}(\cos(\operatorname{Im}z) + i \sin(\operatorname{Im}z))| = |e^{\operatorname{Re}z}| \cdot |\cos(\operatorname{Im}z) + i \sin(\operatorname{Im}z)|.$$

Comincio ad analizzare $|\cos(\operatorname{Im}z) + i \sin(\operatorname{Im}z)|$:

so che $y = \operatorname{Im}z \in \mathbb{R}$, quindi per la prop. 3 si ha

$$|\cos(\operatorname{Im}z) + i \sin(\operatorname{Im}z)| = |\cos(y) + i \sin(y)| = |e^{iy}| = 1.$$

$$\text{Quindi } |e^z| = |e^{\operatorname{Re}z}| \cdot |\cos(\operatorname{Im}z) + i \sin(\operatorname{Im}z)| = e^{\operatorname{Re}z} \cdot 1 = e^{\operatorname{Re}z}$$

cioè il modulo di e^z è $|e^z| = e^{\operatorname{Re}z}$

Dimostrazione di 6. $e^{z+2k\pi i} = e^z \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Per la proprietà 1.: $e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i}$

Quanto vale $e^{2k\pi i}$?

$$e^{2k\pi i} = e^0(\cos(2\pi) + i \sin(2\pi)) = 1(1 + 0) = 1$$

Quindi $e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot 1 = e^z$.

Un numero complesso z può essere espresso in una delle tre seguenti forme, **tutte equivalenti fra di loro**:

$$\begin{aligned} z &= x + iy && \text{forma cartesiana} \\ &= \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) && \text{forma trigonometrica} \\ &= \rho e^{i\vartheta} && \text{forma esponenziale} \end{aligned}$$

A seconda del contesto in cui si lavora, si usa la forma piú adatta:

per **somma e sottrazione**: forma cartesiana

per **prodotto, divisione e potenza**: forma esponenziale.

Operazioni con la forma esponenziale

La forma esponenziale dei numeri complessi è molto comoda per svolgere prodotti, divisioni e potenze di numeri complessi.

Siano $z_1 = \rho_1 e^{i\vartheta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{i\vartheta_2}$, si ha:

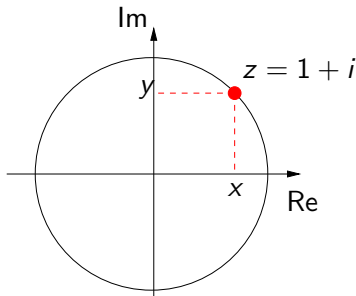
- $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\vartheta_1 - \vartheta_2)}$
- $(z_1)^n = \rho_1^n e^{in\vartheta_1}$
 $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$, formula di *de Moivre*

Es. Calcolare $(1 + i)^6$.

- 1 si trasforma $z = 1 + i$ in forma trigonometrica e poi esponenziale
- 2 si calcola z^6 , utilizzando la forma esponenziale
- 3 si trasforma il risultato nella forma cartesiana.

Passo 1.: $(z = x + iy = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = \rho e^{i\vartheta})$

$$\begin{aligned} z &= (1 + i) \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{aligned}$$



Passo 2.:

$$z^6 = (1 + i)^6 = \left(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^6 = (\sqrt{2})^6 e^{i\frac{3}{2}\pi} = 8 e^{i\frac{3}{2}\pi}$$

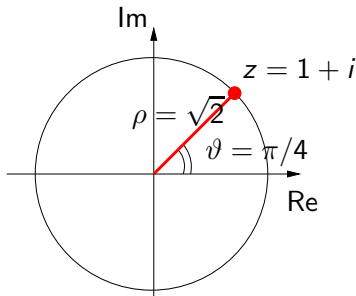
Passo 3.:

$$8 e^{i\frac{3}{2}\pi} = -8i.$$

$$\text{Quindi } (1 + i)^6 = -8i$$

Passo 1.: ($z = x + iy = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = \rho e^{i\vartheta}$)

$$\begin{aligned} z &= (1 + i) \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$



Passo 2.:

$$z^6 = (1 + i)^6 = \left(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^6 = (\sqrt{2})^6 e^{i\frac{3}{2}\pi} = 8 e^{i\frac{3}{2}\pi}$$

Passo 3.:

$$8 e^{i\frac{3}{2}\pi} = -8i.$$

$$\text{Quindi } (1 + i)^6 = -8i$$

Radice n -sima di un numero complesso

Dato $w \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$, vogliamo calcolare tutti i numeri $z \in \mathbb{C}$ per cui vale

$$z^n = w$$

Def. Diciamo che $z \in \mathbb{C}$ è **radice n -sima** di $w \in \mathbb{C}$ se vale $z^n = w$.

L'obiettivo è calcolare le radici n -sime di un numero complesso w assegnato o, equivalentemente, risolvere l'equazione $z^n - w = 0$.

N.B. Non utilizziamo il simbolo $\sqrt{\quad}$ per rappresentare le radici complesse, perchè il risultato non è univoco.

Se $x \in \mathbb{R}$, allora la radice n -sima di x è un **unico** numero reale e il simbolo $\sqrt[n]{x}$ individua un **unico** numero (avevamo costruito $\sqrt[n]{\quad}$ come la funzione inversa della potenza).

Se $z \in \mathbb{C}$, allora le radici n -sime di z sono n e non possiamo utilizzare un solo simbolo per rappresentarle tutte.

Esercizio d'esempio

Risolvere l'equazione $z^3 + 8 = 0$ in \mathbb{C} .

(Equivale a calcolare le radici **terze** di $w = -8$, cioè calcolare gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $z^3 = -8$.)

N.B. L'equazione $x^3 + 8 = 0$ in \mathbb{R} ha una sola soluzione reale:
 $x = -2$.

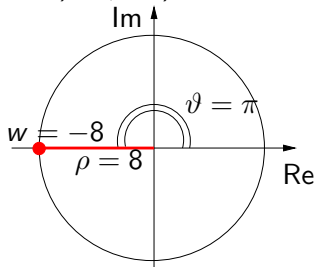
L'equazione $z^3 + 8 = 0$ in \mathbb{C} ha 3 soluzioni distinte complesse.

Procedimento:

1. Si trasforma $w = -8$ in forma esponenziale
2. Si calcolano le radici complesse z_0, z_1, \dots, z_{n-1}
3. Si trasformano in forma algebrica gli z_k trovati.

Passo 1.: ($w = x + iy = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = \rho e^{i\vartheta}$)

$$\begin{aligned}w &= -8 = -8 + 0i \\ &= 8(-1 + 0i) \\ &= 8(\cos \pi + i \sin \pi) = 8e^{i\pi}\end{aligned}$$



Quindi:

$$\rho = 8, \vartheta = \pi$$

Passo 2.:

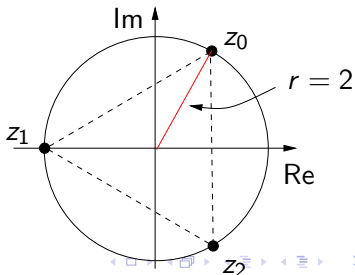
Calcolo $r = \sqrt[n]{\rho}$ (ricordo che $\rho \in \mathbb{R}^+$) e gli angoli $\varphi_k = \frac{\vartheta + 2k\pi}{n}$
per $k = 0, \dots, n-1$:

$$r = \sqrt[3]{8} = 2 \text{ e}$$

$$\varphi_0 = \frac{\vartheta}{n} = \frac{\pi}{3},$$

$$\varphi_1 = \frac{\vartheta + 2\pi}{n} = \frac{\pi + 2\pi}{3} = \pi,$$

$$\varphi_2 = \frac{\vartheta + 4\pi}{n} = \frac{\pi + 4\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$



Quindi: $z_0 = 2e^{i\pi/3}$, $z_1 = 2e^{i\pi}$, $z_2 = 2e^{i5\pi/3}$

Passo 3.:

$$z_0 = 2e^{i\pi/3} = 1 + \sqrt{3}i,$$

$$z_1 = 2e^{i\pi} = -2,$$

$$z_2 = 2e^{i5\pi/3} = 1 - \sqrt{3}i$$

Dimostrazione del teorema

Parto da w in forma esponenziale ed utilizzo la proprietà n. 6 dell'esponenziale (quella che dice $e^{z+2k\pi i} = e^z \quad \forall k \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{aligned}w &= \rho e^{i\vartheta} = \rho e^{i\vartheta+2k\pi i} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ &= r^n e^{i(\vartheta+2k\pi)} = r^n (e^{i(\vartheta+2k\pi)/n})^n \\ &= (r e^{i(\vartheta+2k\pi)/n})^n = (r e^{i\varphi_k})^n = z_k^n\end{aligned}$$

Avrei infinite z_k , tante quante sono i numeri interi, ma quelle distinte sono solo n : z_0, \dots, z_{n-1} .

Infatti abbiamo:

$$z_n = r e^{i\varphi_n} = r e^{i(\vartheta+2n\pi)/n} = r e^{i\vartheta/n+2\pi i} = r e^{i\vartheta/n} = z_0$$

In maniera analoga si dimostra che $z_{n+k} = z_k$.



Esercizio. Calcolare le radici complesse **seste** dell'unità.

Si ha $w = 1$, $n = 6$. Devo calcolare $n = 6$ numeri complessi z_0, z_1, \dots, z_5 della forma

$$z_k = r e^{i\varphi_k}, \text{ con } r = \sqrt[6]{\rho} \text{ e } \varphi_k = \frac{\vartheta + 2k\pi}{6}, \text{ con } k = 0, 1, \dots, 5.$$

Passo 1. Individuo ρ e ϑ :

$$w = 1 = \rho e^{i \cdot 0}, \text{ quindi } \rho = 1 \text{ e } \vartheta = 0$$

Passo 2. Calcolo: $r = \sqrt[6]{\rho} = 1$

Passo 3. Calcolo gli angoli φ_k , con $k = 0, \dots, 5$

$$\varphi_0 = \frac{0 + 0 \cdot 2\pi}{6} = 0, \quad \varphi_1 = \frac{0 + 1 \cdot 2\pi}{6} = \frac{\pi}{3},$$

$$\varphi_2 = \frac{0 + 2 \cdot 2\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}, \quad \varphi_3 = \frac{0 + 3 \cdot 2\pi}{6} = \pi,$$

$$\varphi_4 = \frac{0 + 4 \cdot 2\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}, \quad \varphi_5 = \frac{0 + 5 \cdot 2\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}.$$

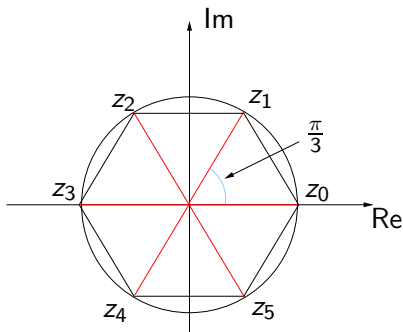
Le radici seste dell'unità sono:

$$z_0 = e^{i\varphi_0} = e^{i0} = 1,$$

$$z_1 = e^{i\varphi_1} = e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = e^{i\varphi_2} = e^{i2\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_3 = e^{i\varphi_3} = e^{i\pi} = -1$$

$$z_4 = e^{i\varphi_4} = e^{i4\pi/3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_5 = e^{i\varphi_5} = e^{i5\pi/3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$



Polinomi in campo complesso

Def. Una funzione $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è un **polinomio** a variabile complessa z se si può scrivere come

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

dove a_0, a_1, \dots, a_n sono numeri complessi assegnati detti **coefficienti** del polinomio. Se $a_n \neq 0$, allora si dice che il polinomio è di grado n .

Es. $p(z) = (3 + i)z^3 - iz^2 + 2$.

Questo polinomio ha grado $n = 3$ e i coefficienti sono:

$$a_3 = 3 + i, a_2 = -i, a_1 = 0, a_0 = 2$$

Def. Si chiama **radice** di p ogni numero complesso w tale che $p(w) = 0$.

Es. $p(z) = z^2 - 7z + (1 - 7i)$, $w = -i$ è una radice di $p(z)$.

Infatti, andando a sostituire $z = -i$ nel polinomio e facendo i conti si ha: $p(-i) = (-i)^2 - 7(-i) + (1 - 7i) = -1 + 7i + 1 - 7i = 0$

Proposizione. (Principio di identità dei polinomi)

Due polinomi $p(z)$ e $q(z)$ sono uguali se e solo se sono uguali i coefficienti delle potenze omologhe dei due.

Es. $p(z) = (3 + i)z^3 - iz^2 + 2$ e $q(z) = (3 + i)z^3 - z^2 + 2$ non sono uguali.

Infatti $a_2 = -i$ per p , mentre $a_2 = -1$ per q .

Teorema (fondamentale dell'algebra). Ogni polinomio $p(z)$ a coefficienti complessi di grado $n \geq 1$ ammette almeno una radice in \mathbb{C} .

Il Teorema fondamentale dell'algebra garantisce che esistano $m \leq n$ numeri complessi distinti z_1, \dots, z_m e m numeri interi μ_1, \dots, μ_m tali che $\mu_1 + \dots + \mu_m = n$ per cui

$$p(z) = a_n(z - z_1)^{\mu_1}(z - z_2)^{\mu_2} \dots (z - z_m)^{\mu_m}.$$

z_k è detta **radice del polinomio** $p(z)$ e μ_k la sua **molteplicità**.

Es. 1 $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$. Si ha $z_1 = i$, $z_2 = -i$.

Ho 2 radici distinte semplici (ovvero con molteplicità 1);

$$z^5 + 2z^3 = z^3(z^2 + 2) = z \cdot z \cdot z \cdot (z - i\sqrt{2}) \cdot (z + i\sqrt{2}).$$

$z_1 = 0$ con molteplicità 3, $z_2 = i\sqrt{2}$ semplice, $z_3 = -i\sqrt{2}$ semplice.

Si ha $m = 3$, $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = \mu_3 = 1$, e $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = n = 5$.

Proposizione. Si consideri un polinomio $p(z)$ con coefficienti $a_i \in \mathbb{R}$. Se w è una radice (non reale), anche \bar{w} è una radice, con la stessa molteplicità.

Inoltre, se il grado del polinomio è dispari, vi è almeno una radice reale.

N.B.

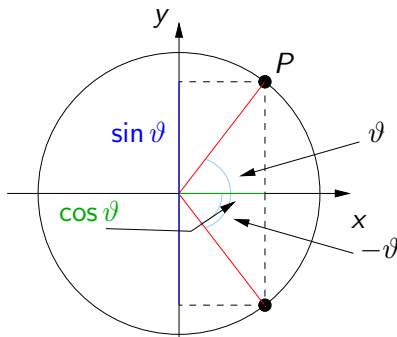
$z^3 = |z|^4$ (ovvero $z^3 - |z|^4 = 0$) NON è una equazione di tipo polinomiale (in un polinomio compaiono solo potenze di z , qui invece c'è anche un modulo).

Osservazioni su sin e cos

Considero la formula di Eulero: $e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$, con $\vartheta \in \mathbb{R}$.

Riscrivo la formula con $-\vartheta$ al posto di ϑ :

$$e^{-i\vartheta} = \cos(-\vartheta) + i \sin(-\vartheta) = \cos \vartheta - i \sin \vartheta$$



$$\cos(-\vartheta) = \cos \vartheta, \quad \sin(-\vartheta) = -\sin \vartheta.$$

Osservazioni su sin e cos

Considero la formula di Eulero: $e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$, con $\vartheta \in \mathbb{R}$,
 $e^{-i\vartheta} = \cos \vartheta - i \sin \vartheta$

Sommo le due formule:

$$e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta} = 2 \cos \vartheta, \quad \text{ovvero} \quad \cos \vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}$$

Sottraggo le due formule:

$$e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta} = 2i \sin \vartheta, \quad \text{ovvero} \quad \sin \vartheta = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i}$$

Sin e Cos in campo complesso

Si estendono le formule date prima per $\vartheta \in \mathbb{R}$ ad un qualsiasi $z \in \mathbb{C}$.

Diventano le definizioni di sin e cos su una variabile complessa.

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Riferimento bibliografico

Per il piano cartesiano: Canuto-Tabacco, sez. 1.5, pag. 22-24.

Per i numeri complessi: Canuto-Tabacco, sez. 8.3.

Esercizi:

- n. 12 - 19 del cap. 8 del libro Canuto-Tabacco.
- esercizi nei temi d'esame

Esercizio

Risolvere l'equazione $z^2 = |z|^4$, con $z \in \mathbb{C}$.