Teorema di sostituzione o del limite di funzioni composte

Questo teorema serve per calcolare il limite di funzioni composte sfruttando limiti fondamentali o altri limiti già noti.
Ad esempio

$$\lim_{x\to+\infty} e^{(1-x^2)/x}$$

o

$$\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{x^2-1}{3+2x^3}\right)$$

o

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan|3-e^x|.$$

Più in generale, dobbiamo calcolare

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)).$$

TEOREMA.

1. Se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell = \pm\infty$ e esiste $\lim_{y \to \ell} g(y)$,

2. oppure se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ e g è continua in $y = \ell$,

3. oppure se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, esiste un intorno $I(x_0)$ tale che $f(x) \neq \ell$ per ogni $x \in I(x_0)$, ed esiste $\lim_{y \to \ell} g(y)$,

ALLORA esiste $\lim_{x \to x_0} g(f(x))$ e si ha

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to \ell} g(y) \tag{1}$$

Esempio 1.

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) \quad = \quad \lim_{y\to \ell} g(y)$$

$$\lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1-x^2}{x}} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sostituzione}}}{=} \quad \lim_{y\to -\infty} e^{y}$$

1. Pongo $y = f(x) = \dfrac{1-x^2}{x}$
2. Calcolo $\ell = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1-x^2}{x} = -\infty$

cioè: se $x \to +\infty \Rightarrow y \to -\infty$. $\ell = -\infty$. Caso 1 del teorema.

3. Sostituisco: $\frac{1-x^2}{x}$ con y e $x \to +\infty$ con $y \to -\infty$
4. Calcolo $\lim_{y\to-\infty} e^{y} = 0$

Esempio 2.

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) \qquad = \qquad \lim_{y\to\ell} g(y)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sostituzione}}}{=} \qquad \lim_{y\to+\infty} \arctan(y)$$

1. Pongo $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$
2. Calcolo $\ell = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

cioè: se $x \to 0^+ \Rightarrow y \to +\infty$. $\ell = +\infty$. Caso 1 del teorema.

3. Sostituisco: $\frac{1}{x}$ con y e $x \to 0^+$ con $y \to +\infty$
4. Calcolo $\lim_{y\to+\infty} \arctan(y) = \dfrac{\pi}{2}$

Esempio 3.

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to \ell} g(y)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{x^2-1}{3+2x^3}\right) = \lim_{y \to 0} \sin(y)$$

$$\uparrow$$

sostituzione

1. Pongo $y = f(x) = \dfrac{x^2-1}{3+2x^3}$
2. Calcolo $\ell = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2-1}{3+2x^3} = 0$

cioè: se $x \to +\infty \Rightarrow y \to 0$. $\ell = 0$, $g(y) = \sin(y)$ è continua in 0. Caso 2 del teorema.

3. Sostituisco: $\frac{x^2-1}{3+2x^3}$ con y e $x \to +\infty$ con $y \to 0$
4. Calcolo $\lim_{y \to 0} \sin(y) = 0$

Esempio 4.

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) \quad = \quad \lim_{y\to \ell} g(y)$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\log(x))}{\log(x)} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sostituzione}}}{=} \quad \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y}$$

1. Pongo $y = f(x) = \log(x)$
2. Calcolo $\ell = \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \log(x) = 0$

cioè: se $x \to 1 \Rightarrow y \to 0$. $\ell = 0$, $f(x) \neq 0$ in un intorno di $x_0 = 1$ e $\exists \lim_{y\to\ell} g(y)$. Caso 3 del teorema.

3. Sostituisco: $\log(x)$ con y e $x \to 1$ con $y \to 0$
4. Calcolo $\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$

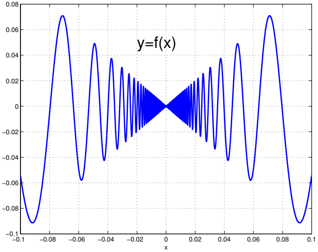
Approfondimento

Un esempio a cui non è possibile applicare il teorema di sostituzione.
$\lim_{x\to 0} |sign(x\sin(1/x))|$. ($x_0 = 0$).

$$y = f(x) = x\sin(1/x), \qquad g(y) = |sign(y)| = \begin{cases} 1 & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

$\exists \ell = \lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, $f(x) = \ell = 0$ in infiniti punti in $I(x_0)$;
esiste $\lim_{y\to 0} g(y) = 1$, ma $g(0) = 0 \Rightarrow g$ NON è continua in $\ell = 0$;

le ipotesi del teorema non sono soddisfatte, cosa succede?



In un intorno, anche molto piccolo di 0, f assume valore nullo in infiniti punti, tutti quelli del tipo $x = 1/(k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$ e non nullo. In tutti i punti in cui f si annulla, la funzione g ha valore zero, in tutti gli altri punti g ha valore 1.

La funzione $g(f(x))$ continua ad oscillare tra i valori 0 e 1.

$\nexists \lim_{x\to 0} g(f(x)) = \lim_{x\to 0} |sign(x\sin(1/x))|$, anche se $\exists \lim_{y\to 0} g(y) = 1$

Conseguenza del teorema di sostituzione

Se esiste $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ e se g è una funzione definita in un intorno di ℓ e g è continua in ℓ,
allora

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{y\to\ell} g(y) = g(\ell) = g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)$$

cioè il limite commuta con la fuzione continua

Esempio. La funzione $g(x) = e^x$ è continua su tutto $\mathbb{R}$, quindi, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ per cui esiste $\lim_{x\to x_0} f(x)$ si ha:

$$\lim_{x\to x_0} e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} f(x)}$$

Teorema (composizione di funzioni continue)

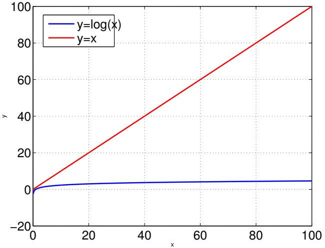
Sia f una funzione definita e continua in un intorno di x_0 e sia $y_0 = f(x_0)$.
Sia poi g una funzione definita e continua in un intorno di y_0, allora anche $h(x) = g(f(x))$ è continua in x_0.

Esempio. Sia $x_0 = 1$. La funzione $h(x) = \sin(|x-1|)$ è una funzione continua in $x_0 = 1$ perché $f(x) = |x-1|$ è continua in 1, $f(1) = 0$ e $g(x) = \sin(x)$ è continua in 0.

Si ha anche che $h(x) = \sin(|x-1|)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ perché sia $f(x) = |x-1|$ che $g(x) = \sin(x)$ sono continue su tutto $\mathbb{R}$.

Un limite notevole

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x} = 0$$



$$|Terra - Marte| \simeq 57.590.630 km$$
$$\log_{10}(57.590.630) \simeq 7.76$$
$$\log_e(57.590.630) \simeq 17.87$$

Sia $\log(x)$ che x tendono all'infinito per $x \to +\infty$ (sono entrambe funzioni infinite), ma $\log(x)$ ha un ordine di infinito minore di x (cioè tende a $+\infty$ meno velocemente).

Es. $\lim_{x\to 0^+}(x \cdot \log x) = 0 \cdot \infty$. forma indeterminata

Anzitutti riscrivo

$$\lim_{x\to 0^+}(x \cdot \log x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1/x)^{-1}}{1/x} = - \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1/x)}{1/x}$$

Applico il teorema di sostituzione con $y = f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 0^+$, $g(y) = \frac{\log y}{y}$ (verificare che le ipotesi siano soddisfatte)

$$\lim_{x\to 0^+}(x \cdot \log x) = - \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1/x)}{1/x} = - \lim_{y\to +\infty} \frac{\log y}{y} = -0^+ = 0^-$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}(x \cdot \log x) = 0^-}$$

Applicazione del thm di sostituzione

Si vuole calcolare $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$.

Si utilizza l'identità

$$\boxed{(f(x))^{g(x)} = e^{\log(f(x))^{g(x)}} = e^{g(x)\cdot \log f(x)}}$$

Quindi: $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \exp(g(x)\cdot \log f(x)) =$
$\exp\left(\lim_{x\to x_0} (g(x)\cdot \log f(x))\right)$.

Es. Calcolare $\lim_{x\to 0^+} x^x =$

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} \exp\left(x\cdot \log x\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0^+} (x\cdot \log x)\right) = e^0 = 1.$$

Si ricorda che $\lim_{x\to 0^+} (x\cdot \log x) = 0$

Partendo da $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
e applicando il Teorema di sostituzione si può dimostrare che:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e$$

.... pag. 108-109

Riferimenti bibliografici: Canuto-Tabacco: Cap 4

Esercizi Canuto-Tabacco: es. n.2, 3, 4, 5 del cap. 4.