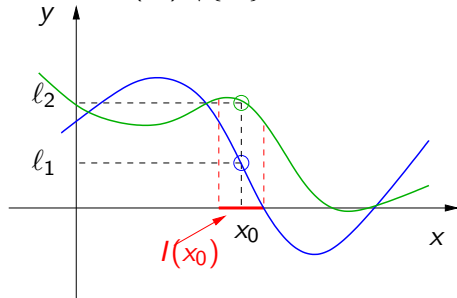


Primo Teorema del confronto. Supponiamo che f ammetta limite $l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ per $x \rightarrow x_0$ e la funzione g ammetta limite $l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ per $x \rightarrow x_0$. Se esiste un intorno $I(x_0)$ di x_0 tale che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$, allora $l_1 \leq l_2$.



La dimostrazione è svolta a lezione. Una dimostrazione alternativa è riportata a pag. 96 del libro di testo.

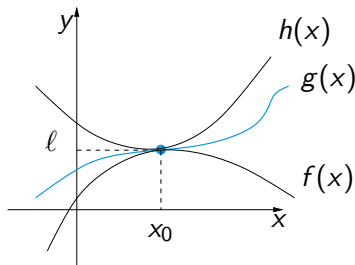
Secondo Teorema del confronto. Siano date tre funzioni: f , g e h e supponiamo che esistano e siano uguali i limiti

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell.$$

Se esiste un intorno $I(x_0)$ in cui siano definite le tre funzioni, tranne al più nel punto x_0 , tale che

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\},$$

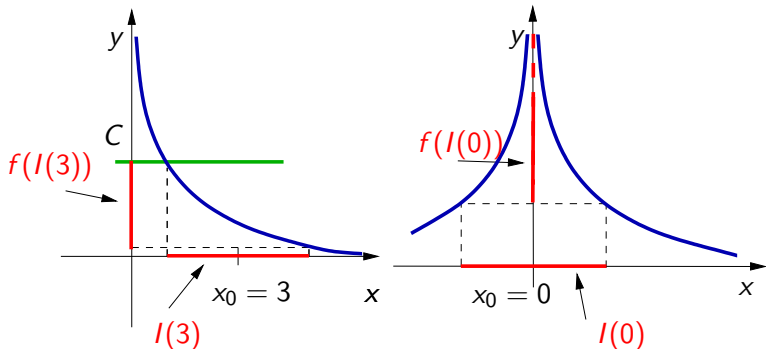
allora si ha $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$.



Funzione limitata in un intorno

Def. Una funzione f è **limitata in un intorno** $I(x_0)$ del punto x_0 , se esiste una costante $C > 0$ tale che

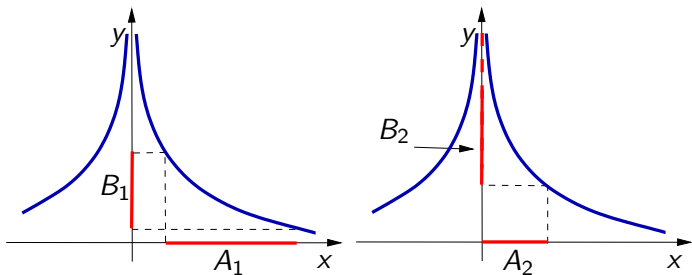
$$|f(x)| \leq C, \quad \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}.$$



f è limitata nell'intorno $I(3)$ ma non è limitata nell'intorno $I(0)$

Sia $A \subseteq \text{dom}(f)$ e $B = f(A) = \{y = f(x), \text{ con } x \in A\}$ (insieme immagine di A mediante f).

Def. Diciamo che f è **limitata su A** se B è un insieme limitato in \mathbb{R} .



f è limitata su A_1 . B_1 è un insieme limitato.

f non è limitata su A_2 . Si ha $\sup_{x \in A_2} f(x) = +\infty$ e B_2 non è un insieme limitato superiormente.

Funzione limitata

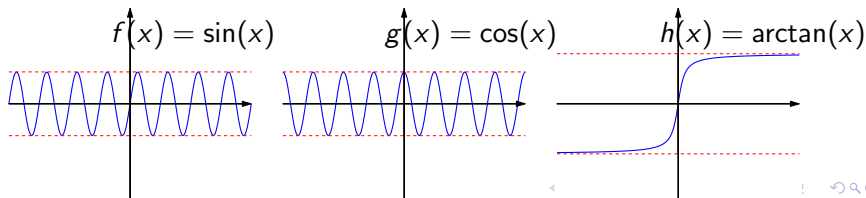
Sia $f : \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Def. Diciamo che f è **limitata** (sul suo dominio) se il suo insieme immagine $\text{im}(f)$ è un insieme limitato in \mathbb{R} .

Def. Diciamo che f è **limitata inferiormente** (sul suo dominio) se $\text{im}(f)$ è un insieme limitato inferiormente in \mathbb{R} .

Def. Diciamo che f è **limitata superiormente** (sul suo dominio) se $\text{im}(f)$ è un insieme limitato superiormente in \mathbb{R} .

Esempi. $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)$, $h(x) = \arctan(x)$ sono funzioni limitate. Infatti $\text{im}(f) = \text{im}(g) = [-1, 1]$, $\text{im}(h) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ sono tutti insiemi limitati

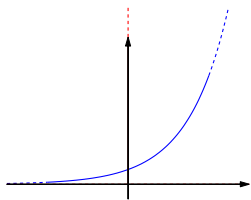


Esempi di funzioni NON limitate.

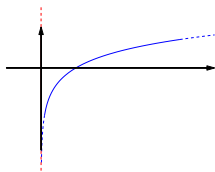
$f(x) = e^x$, è solo limitata inferiormente, $\text{im}(f) = \mathbb{R}^+$

$g(x) = \log(x)$ non è limitata, $\text{im}(g) = \mathbb{R}$,

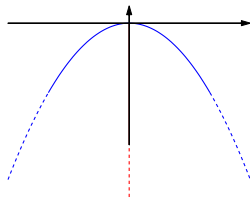
$h(x) = -x^2$ è solo limitata superiormente, $\text{im}(h) = (-\infty, 0]$.



$$f(x) = e^x$$



$$g(x) = \log(x)$$



$$h(x) = -x^2$$

OSSERVAZIONE

Dire che f è limitata nell'intorno $I(x_0)$ NON vuole dire che esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Esempio. Sia $f(x) = \sin(x)$. L'insieme immagine di f è $\text{im}f = [-1, 1]$ è un insieme limitato (ammette sia maggioranti che minoranti), quindi

f è limitata su tutto il suo dominio, cioè su \mathbb{R} .

Consideriamo anche la seconda definizione data.

Abbiamo $-1 \leq f(x) \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$, quindi possiamo dire che $|f(x)| \leq C$ $\forall x \in \mathbb{R}$ con $C = 1$.

Quindi f è limitata in un intorno di $x_0 = +\infty$.

Tuttavia $\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Infatti f continua a oscillare e la definizione di limite non è soddisfatta per alcun valore di ℓ . (si veda pag. 16 di cap3a.pdf).

Corollario al II thm del confronto

Def. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, si dice che g è **infinitesima per $x \rightarrow x_0$** .

Teorema. Sia f una funzione limitata in un intorno di x_0 e sia g una funzione infinitesima per $x \rightarrow x_0$. Allora $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = 0$, ovvero la funzione prodotto fg è infinitesima per $x \rightarrow x_0$.

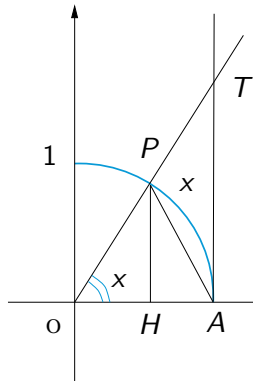
Es. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x}$.

$f(x) = \sin(x)$ è limitata: $|\sin(x)| \leq 1$ e $g(x) = \frac{1}{x}$ è tale che

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. Allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$.

Limite fondamentale $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Dim.



Lavoro con $x \geq 0$, osservo che $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ è pari.

Se l'angolo $\widehat{POA} = x$ allora l'arco \widehat{AP} è lungo x , e $A(\widehat{OPA}) = \frac{x}{2}$.

Infatti

$$\widehat{AP}: 2\pi r = x : 2\pi, \Rightarrow \widehat{AP} = x \cdot r = x;$$

$$A(\widehat{OPA}) : \pi r^2 = x : 2\pi, \Rightarrow A(\widehat{OPA}) = \frac{x}{2}$$

$$A(\triangle POA) = \frac{\overline{PH} \cdot \overline{OA}}{2} = \frac{\sin(x)}{2},$$

$$A(\triangle TOA) = \frac{\overline{TA} \cdot \overline{OA}}{2} = \frac{\tan(x)}{2}$$

$$A(\triangle POA) \leq A(\widehat{OPA}) \leq A(\triangle TOA) \quad \text{ovvero} \quad \frac{\sin(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan(x)}{2}.$$

Moltiplicando $\frac{\sin(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan(x)}{2}$ per $\frac{2}{\sin(x)}$ si ha

$$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

e invertendo il tutto:

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1.$$

Per il secondo teorema del confronto, facendo tendere x a 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \quad \text{e quindi} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1. \quad \square$$

Riferimenti bibliografici: Canuto-Tabacco: Sez. 4.1.2
Esercizi Canuto Tabacco: cap. 4