Limiti delle funzioni elementari

Ricordando i grafici delle funzioni elementari abbiamo:

$$\lim_{x\to-\infty} c = c \qquad \lim_{x\to+\infty} c = c \quad (c \text{ costante})$$

$$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & \text{se } n \text{ è disp.} \\ +\infty & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases} \qquad \lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases} \qquad \lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

Limiti delle funzioni elementari

$$\lim_{x\to 0^+} \log(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} \log(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} \sin(x) = \nexists \qquad \lim_{x\to +\infty} \sin(x) = \nexists$$

$$\lim_{x\to -\infty} \cos(x) = \nexists \qquad \lim_{x\to +\infty} \cos(x) = \nexists$$

$$\lim_{x\to -\infty} \tan(x) = \nexists \qquad \lim_{x\to +\infty} \tan(x) = \nexists$$

Teoremi sui limiti

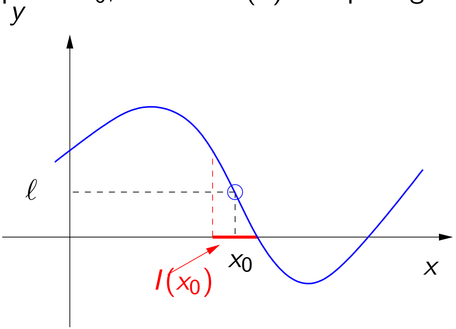
Quando non espressamente detto, intendiamo che:

- $f : dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ è punto di accumulazione per dom(f).

Teorema di unicità del limite. Supponiamo che f ammetta limite ℓ (finito o infinito) per $x \to x_0$. Allora f non ha altri limiti per $x \to x_0$.

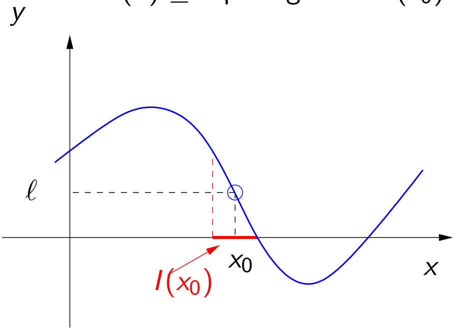
La dimostrazione è svolta a lezione. Una dimostrazione alternativa è riportata a pag. 93-94 del libro di testo.

Teorema di permanenza del segno. Supponiamo che esista $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Se $\ell > 0$, allora esiste un intorno $I(x_0)$ del punto x_0, tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$.



La dimostrazione è svolta a lezione. Una dimostrazione alternativa è riportata a pag. 94-95 del libro di testo.

Corollario al teorema di permanenza del segno. Supponiamo che esista $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ e che esista un intorno $I(x_0)$ del punto x_0, tale che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$. Allora $\ell \geq 0$.



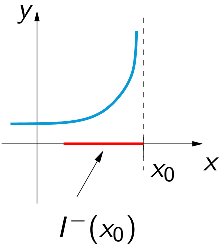
La dimostrazione è svolta a lezione. (Si veda pag. 95 del libro di testo)

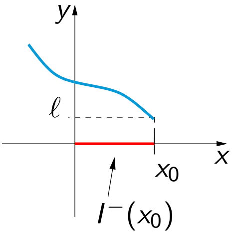
Limiti di funzioni monotone

Teorema. Sia f una funzione definita e monotona in un intorno sinistro $I^-(x_0)$ del punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, escluso al più il punto x_0 stesso.
Allora esiste finito o infinito $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e precisamente si ha:

Se f è crescente in $I^-(x_0) \Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{x \in I^-(x_0)} f(x)$

Se f è decrescente in $I^-(x_0) \Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \inf_{x \in I^-(x_0)} f(x)$



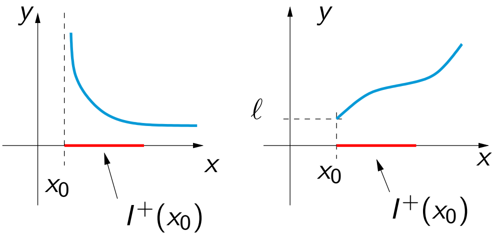


Limiti di funzioni monotone

Teorema. Sia f una funzione definita e monotona in un intorno destro $I^+(x_0)$ del punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, escluso al più il punto x_0 stesso.
Allora esiste finito o infinito $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ e precisamente si ha:

Se f è decrescente in $I^+(x_0) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \sup\limits_{x\in I^+(x_0)} f(x)$

Se f è crescente in $I^+(x_0) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \inf\limits_{x\in I^+(x_0)} f(x)$



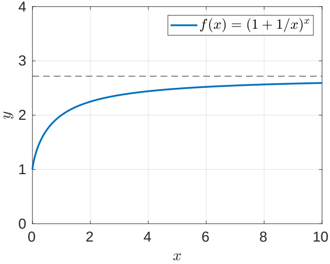
Un limite notevole

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Si dimostra grazie al teorema del limite di funzioni monotone.

Si riesce a provare che $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ è monotona crescente in $(0,+\infty)$, e che il sup del suo insieme immagine è $\sup_{x>0} f(x) = e$.
Per il teorema del limite di funzioni monotone si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sup_{x>0} f(x) = e$$



Operazioni con i simboli $+\infty$ e $-\infty$

Ricordiamo che $\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ è detta **retta reale estesa**.
Definiamo le operazioni su $\overline{\mathbb{R}}$.
Immaginiamo che gli operandi di queste operazioni siano i risultati del calcolo di certi limiti.

Somma

$$\begin{array}{rrl} x + (+\infty) = +\infty & x + (-\infty) = -\infty & \forall x \in \mathbb{R} \\ (+\infty) + (+\infty) = +\infty & (-\infty) + (-\infty) = -\infty & \end{array}$$

Prodotto

$$\begin{array}{rrr} x \cdot (+\infty) = +\infty, & x \cdot (-\infty) = -\infty & \forall x \in \mathbb{R}^+ \\ x \cdot (+\infty) = -\infty, & x \cdot (-\infty) = +\infty & \forall x \in \mathbb{R}^- \\ (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty, & (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty, & (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty \end{array}$$

Divisione

$$\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{+\infty}{x} = +\infty, \quad \frac{-\infty}{x} = -\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$\frac{+\infty}{x} = -\infty, \quad \frac{-\infty}{x} = +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^-$$

$$\frac{x}{0} = \infty \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Non sono definite le seguenti operazioni:

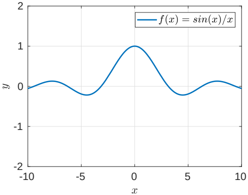
$$(+\infty) + (-\infty), \qquad (\pm\infty) \cdot 0, \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \frac{0}{0}$$

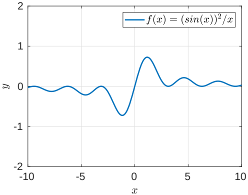
$$\infty^0, \qquad 0^0, \qquad 1^\infty$$

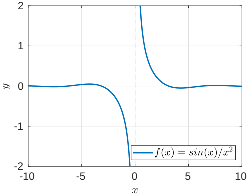
Sono dette forme indeterminate perché il risultato non è sempre lo stesso. Esse devono essere indagate e risolte caso per caso, con opportune regole. Ad esempio, $(+\infty) + (-\infty)$ potrebbe dare come risultato $\ell \in \mathbb{R}$, oppure $+\infty$, oppure $-\infty$, a seconda di cosa rappresentano i vari "infiniti".

Esempi di forme indeterminate $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{0}{0}, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{(\sin(x))^2}{x} = \frac{0}{0}, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x^2} = \frac{0}{0}$$







$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{(\sin(x))^2}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x^2} = \infty$$

Algebra dei limiti

Teorema. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, allora, quando l'espressione a secondo membro è definita (non si hanno forme indeterminate), si ha

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_1 + \ell_2$$
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_1 - \ell_2$$
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = (\lim_{x\to x_0} f(x))\cdot(\lim_{x\to x_0} g(x)) = \ell_1 \cdot \ell_2$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2} \qquad (g(x)\neq 0,\ \forall x \in I(x_0)\setminus\{x_0\})$$

Es.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\log(x)+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\log(x) + \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = +\infty + 0 = +\infty$$

Riferimenti bibliografici

Canuto-Tabacco:
Sez. 4.1.1 (teoremi), 4.1.3 (operazioni in $\overline{\mathbb{R}}$, algebra dei limiti e forme indeterminate)
Sez. 3.3.4 (per il limite delle funzioni monotone)