CONTINUITA'

Ricordiamo la definizione di limite $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$:

$$\forall I_\varepsilon(\ell),\ \exists I_\delta(x_0) :\ \forall x \in \mathrm{dom}(f) \cap I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}\ \Rightarrow\ f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$$

o equivalentemente

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in \mathrm{dom}(f)\ e\ 0 < |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Qui x_0 è di accumulazione per $\mathrm{dom}(f)$, ma non è detto che $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$

Funzione continua in un punto

Def. Sia $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$. La funzione f si dice **continua in** x_0 se

$$\forall I_\varepsilon(f(x_0)),\ \exists I_\delta(x_0):\ \forall x \in \mathrm{dom}(f) \cap I_\delta(x_0) \ \Rightarrow\ f(x) \in I_\varepsilon(f(x_0))$$

o equivalentemente:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0:\ \forall x \in \mathrm{dom}(f) \text{ e } |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Def. di limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$:

$$\forall I_\varepsilon(\ell),\ \exists I_\delta(x_0):\ \forall x \in \mathrm{dom}(f) \cap I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \ \Rightarrow\ f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$$

o equivalentemente

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0:\ \forall x \in \mathrm{dom}(f) \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Osservare bene le differenze e le analogie tra la def. di limite e la def. di funzione continua in un punto.

Funzione continua in un punto

- se x_0 è punto isolato per $\mathrm{dom}(f)$

allora $f(x)$ è SEMPRE continua in x_0.

- se x_0 è di accumulazione per $\mathrm{dom}(f)$

allora $f(x)$ è continua in x_0 se e solo se

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \text{e} \quad \ell = f(x_0)$$

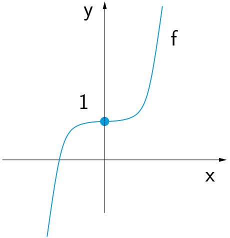
(esiste il limite di f per x tendente a x_0 e questo limite coincide con il valore della funzione f in x_0)

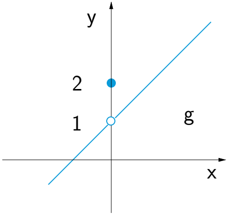
o, equivalentemente, se e solo se

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell, \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \quad \text{e} \quad \ell = f(x_0)$$

(esistono il limite sinistro e destro di f per $x \to x_0$, questi sono uguali e coincidono con il valore della funzione f in x_0)

Esempi: studiare la continuità in $x_0 = 0$





$$f(x) = 3x^3 + 1$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

$$f(0) = 1$$

$$\Downarrow$$

$f(x)$ è continua in $x_0 = 0$

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 1$$

$$g(0) = 2$$

$$\Downarrow$$

$g(x)$ NON è continua in $x_0 = 0$

Continuità da sinistra e da destra

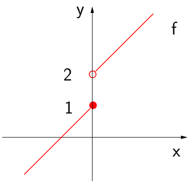
Sia $x_0 \in \text{dom}(f)$.

Def. Una funzione f definita in un intorno sinistro di x_0 è continua da sinistra in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Def. Una funzione f definita in un intorno destro di x_0 è continua da destra in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

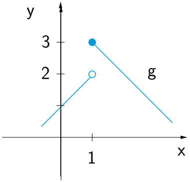


$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$

$f(0) = 1$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$

f è continua da sinistra



$\lim_{x \to 1^-} g(x) = 2$

$g(1) = 3$

$\lim_{x \to 1^+} g(x) = 3$

g è continua da destra

Funzioni continue

Proprietà una funzione f definita in un intorno di x_0 è continua in x_0 se e solo se è continua da destra e da sinistra in x_0.
Def. Una funzione che non è continua in x_0 si dice DISCONTINUA in x_0.
Def. f si dice **continua su un insieme** $A \subseteq \text{dom}(f)$ se è continua in ogni punto di A.

Proposizione. Tutte le funzioni elementari (polinomi, funzioni razionali, funzioni elevamento a potenza, funzioni trigonometriche, funzioni esponenziali e loro funzioni inverse) sono continue in tutto il loro dominio.

Corollario al Thm dell'algebra dei limiti.
Siano f e g due funzioni continue in $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora sono continue in x_0 anche le funzioni $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ e $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (quest'ultima a patto che $g(x_0) \neq 0$.)

Punti di discontinuità

Un punto di discontinuità per f è un punto in cui f non è continua.
Classificazione:

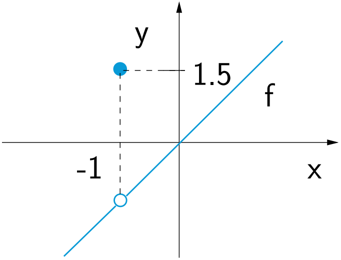
- Punto di discontinuità eliminabile
- Punto di salto
- Punto di infinito
- Punto di discontinuità di seconda specie.

Punto di discontinuità eliminabile

Def. Sia f una funzione definita in un intorno di x_0. Se esiste finito $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ e, $f(x_0) \neq \ell$ diciamo che x_0 è **punto di discontinuità eliminabile per** f.

Es.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \neq -1 \\ 1.5 & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

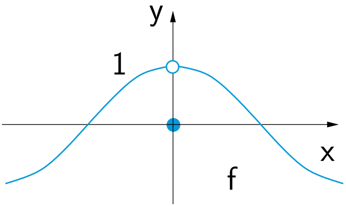


Il punto in questione è $x_0 = -1$,

$$\lim_{x\to -1} f(x) = -1,\ f(-1) = 1.5 \neq -1$$

Es.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sin(x)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



$\text{dom}(f) = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$, $f(0) = 0$,
mentre $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

Perché "eliminabile"? Perché partendo da $f(x)$, si costruisce una nuova funzione $\tilde{f}$ che differisce da f solo in un punto:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell & \text{se } x = x_0. \end{cases} \qquad \tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{sin(x)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Ne segue che $\tilde{f}$ è continua in x_0 perché

$$\lim_{x \to x_0} \tilde{f}(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \text{ e } \tilde{f}(x_0) = \ell.$$

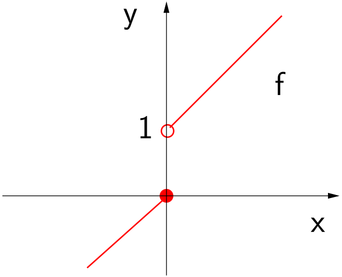
Punto di discontinuità di tipo salto

Def. Sia f una funzione definita in un intorno di x_0. Se esistono finiti $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$, con $\ell_1 \neq \ell_2$, diciamo che x_0 è **punto di discontinuità di salto per** f e si definisce salto di f in x_0 il valore $[f]_{x_0} = \lim_{x\to x_0^+} f(x) - \lim_{x\to x_0^-} f(x)$.

Es.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 0 \\ x+1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0$, f è definita in $I(x_0)$ incluso x_0.



$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $[f]_0 = 1 - 0 = 1$.

Punto di infinito

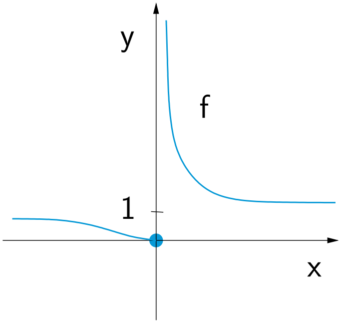
Def. Sia f una funzione definita in un intorno di x_0. Se esistono infiniti $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, con segno uguale o diverso, o se un limite è finito e l'altro è infinito,
diciamo che x_0 è **punto di infinito per** f.

Es.

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0$, f è definita in $I(x_0)$.

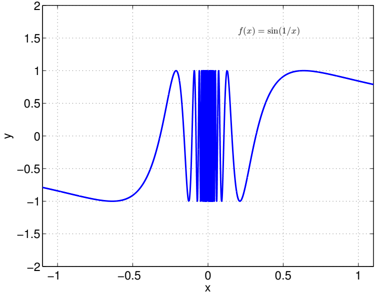
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty,$$



Discontinuità di seconda specie

Def. Sia f una funzione definita in un intorno di x_0. Se in x_0, uno dei due limiti (destro o sinistro) o entrambe non esistono, si dice che x_0 è un **punto di discontinuità di seconda specie** per f.

Es. $$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$ $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$.



NON esiste $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} sin\left(\frac{1}{x}\right)$ e

NON esiste $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

$x = 0$ è punto di disc. di seconda specie per $f(x)$

Schema riassuntivo sui punti di discontinuità

Sia $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$ non isolato

$\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R},\ \exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$ $f(x_0) = \ell_1 = \ell_2$	f è continua in x_0
$\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R},\ \exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$ $\ell_1 = \ell_2, f(x_0) \neq \ell_1 = \ell_2$	f è disc in x_0 p.to di disc. eliminabile
$\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R},\ \exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$ $\ell_1 \neq \ell_2$	f è disc in x_0 p.to di salto
$\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}},\ \exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ almeno uno dei due limiti è infinito	f è disc in x_0 p.to di infinito
$\nexists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_1$ o $\nexists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_2$ almeno uno dei due limiti non esiste	f è disc in x_0 p.to di disc. di II specie

Riferimenti bibliografici: Canuto-Tabacco: Sezioni 3.3.2, 3.3.3, 3.3.4

Esercizi Studiare il tipo di discontinuità presente nelle seguenti funzioni.

$$f(x) = \begin{cases} \log(x) & x \geq 1 \\ x^2 + 3 & x < 1 \end{cases}, \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 3 & x = 0 \end{cases},$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 3 & x = 0 \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}.$$