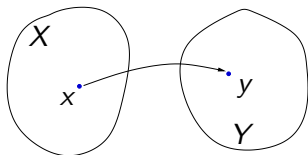


FUNZIONI

Siano X e Y due insiemi.

Def. Una **funzione f definita in X a valori in Y** è una corrispondenza (una legge) che associa ad ogni elemento $x \in X$ al più un elemento y in Y .



Def. L'insieme Y è detto **codominio** di f .

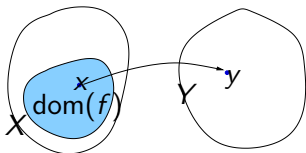
Es. Siano $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$ e $f : x \mapsto y = \frac{1}{x}$ (ad un numero reale associo il suo inverso).

x	4	$\sqrt{2}$	$-2/3$...	$-e$...	0
$y = 1/x$	$1/4$	$1/\sqrt{2}$	$-3/2$...	$-1/e$...	?



Def. L'insieme degli $x \in X$ a cui f associa **uno e un solo** elemento $y \in Y$ è detto **dominio** di f e si indica con $\text{dom}(f)$. Si ha $\text{dom}(f) \subseteq X$ e si scrive:

$$f : \text{dom}(f) \subseteq X \rightarrow Y.$$



N.B. $\text{dom}(f)$ è l'insieme degli $x \in X$ per i quali la corrispondente y sta in Y .

Es. $f(x) = 1/x$ con $X = Y = \mathbb{R}$. Se $x \neq 0 \Rightarrow y = 1/x \in \mathbb{R}$

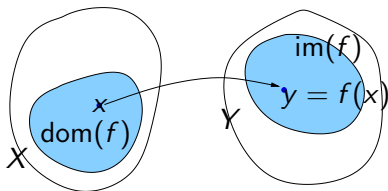
MA $\frac{1}{0} \notin \mathbb{R}$, **QUINDI** $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Oss. $\forall x \in \text{dom}(f)$, f associa ad x **uno e un solo** elemento $y \in Y$.



Immagine

Def. L'unico elemento $y \in Y$ associato ad un elemento $x \in \text{dom}(f)$ si dice **immagine di x attraverso f** e si scrive $y = f(x)$ (oppure $f : x \mapsto y = f(x)$).



Def. Dato $A \subset \text{dom}(f)$, l'insieme $B = \{y \in Y : \exists x \in A : y = f(x)\}$ è detto **immagine di A attraverso f** e si può scrivere $B = f(A)$.

Def. L'insieme $\text{im}(f) = \{y \in Y : \exists x \in \text{dom}(f) : y = f(x)\}$ è detto **immagine di f** . Si ha l'inclusione: $\text{im}(f) \subseteq Y$.

Es. $f(x) = 1/x$ con $X = Y = \mathbb{R}$.

$y = 1/4$ è l'immagine di $x = 4$ mediante f .

L'insieme immagine è: $\text{im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Def. L insieme

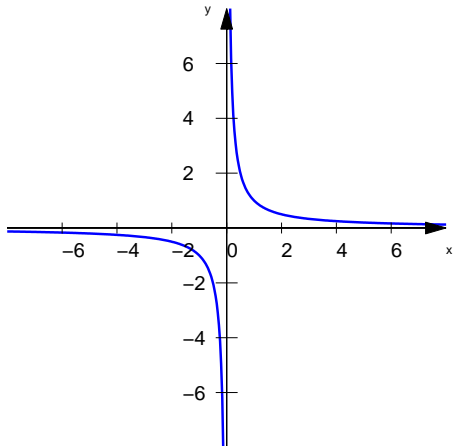
$$G(f) = \{(x, y) \mid x \in \text{dom}(f), \text{ e } y = f(x) \in \text{im}(f)\} \subset X \times Y$$

è detto **grafico** di f .

Es. $f(x) = 1/x$ con $X = Y = \mathbb{R}$.

$X \times Y = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 =$ piano cartesiano.

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1/x\}$$

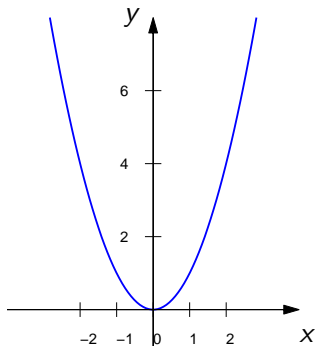


Def. Una funzione si dice **reale** se $Y = \mathbb{R}$.

Def. Una funzione si dice **a variabile reale** se $X = \mathbb{R}$.

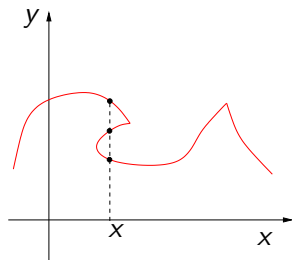
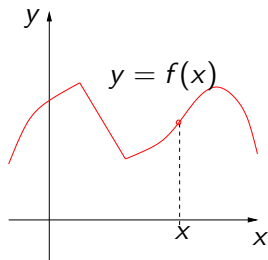
Il grafico di una funzione reale a variabile reale è l'insieme dei punti (x, y) del piano cartesiano tali che $y = f(x)$.

Es. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = x^2$



Esempi di grafici

A sinistra è rappresentato il grafico di una funzione $y = f(x)$:
ad una x corrisponde un solo punto del grafico e quindi una ed una sola $y = f(x)$



Il grafico a destra non può rappresentare una funzione $y = f(x)$, in quanto esistono delle x a cui corrispondono 2 o 3 punti del grafico e quindi 2 o 3 y differenti, e ciò contraddice la definizione di funzione $f : x \mapsto y = f(x)$



Controimmagine

Def. Sia $y \in Y$, la **controimmagine di y attraverso f** è l'insieme

$$f^{-1}(y) = \{x \in \text{dom}(f) : f(x) = y\} \subseteq \text{dom}(f).$$

Es. Considerando la funzione di prima $f(x) = \frac{1}{x}$, la controimmagine del valore $y = 3$ è

$$f^{-1}(3) = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : 1/x = 3\} = \{1/3\}$$

La controimmagine di $y = 0$ è

$$f^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : 1/x = 0\} = \emptyset$$

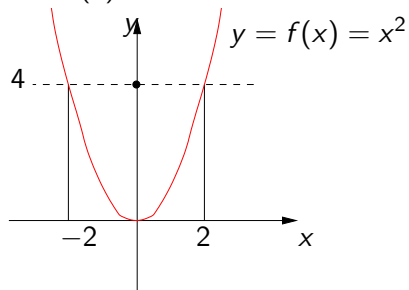
Non c'è alcun valore reale x tale che $1/x = 0$.



Es. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2,$

$\text{dom}(f) = \mathbb{R}, \text{im}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, +\infty).$

? $f^{-1}(4)$



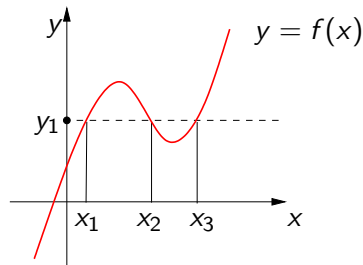
$$f^{-1}(4) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 4\} = \{-2, 2\}$$



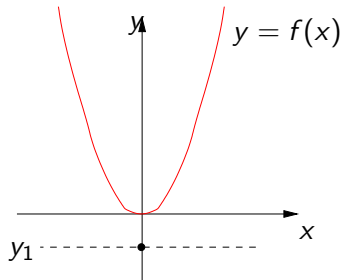
f suriettiva

Def. Una funzione si dice **suriettiva** se $\text{im}(f) = Y$, ovvero se ogni elemento di Y ha per controimmagine un insieme non vuoto, ovvero ogni elemento di Y è l'immagine di almeno un elemento di $\text{dom}(f)$.

Esempi



SURIETTIVA:
 $\text{im}(f) = Y = \mathbb{R}$



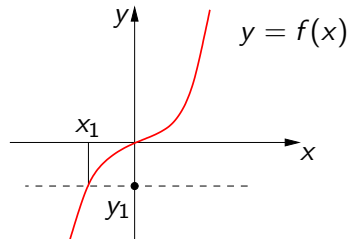
NON SURIETTIVA:
 $\text{im}(f) = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $Y = \mathbb{R}$



f iniettiva

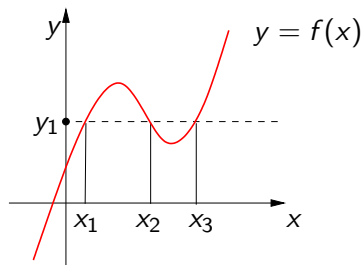
Def. Una funzione si dice **iniettiva** se ogni elemento di $\text{im}(f)$ è immagine al più di un elemento di $\text{dom}(f)$, o equivalentemente se $\forall x_1, x_2 \in \text{dom}(f), x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Esempi



INIETTIVA:

$$f^{-1}(y_1) = \{x_1\}$$



NON INIETTIVA:

$$f^{-1}(y_1) = \{x_1, x_2, x_3\}, \text{ o } f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = y_1$$



f biettiva

Def. Una funzione f si dice **biunivoca** o **biettiva** se è sia iniettiva che suriettiva, ovvero ogni elemento $y \in Y$ è immagine di uno e uno solo elemento $x \in \text{dom}(f)$.

Osservazione: Sia $D = \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R}$ e $Y = \mathbb{R}$.

Se invece di considerare $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, consideriamo $f : D \rightarrow \text{im}(f)$, automaticamente abbiamo f **suriettiva** (facciamo coincidere il codominio con $\text{im}(f)$).

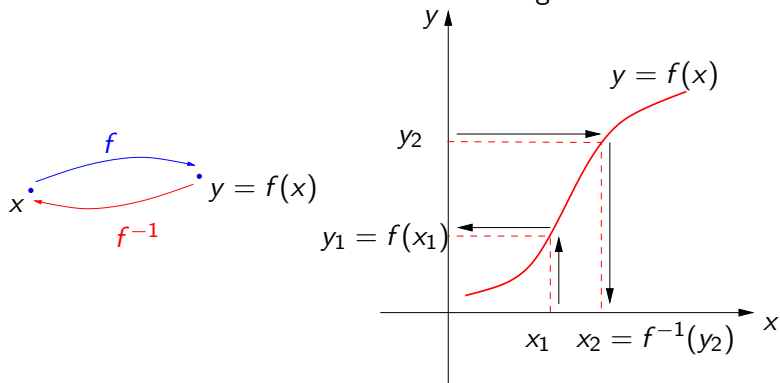
Per definizione di $\text{im}(f)$, ad ogni elemento $y \in \text{im}(f)$ corrisponde almeno un elemento $x \in D : y = f(x)$.



Funzione inversa

Sia $D = \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R}$. Considero una funzione $f : D \rightarrow \text{im}(f)$ (quindi suriettiva).

Def. Se una funzione f è iniettiva sul suo dominio, possiamo costruire una funzione che ad ogni elemento $y \in \text{im}(f)$ associa l'unico elemento x dell'insieme controimmagine.



Tale funzione è detta **funzione inversa** di f , viene indicata con f^{-1}

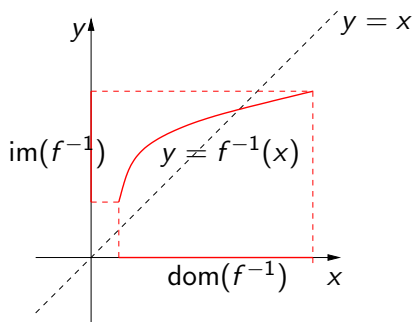
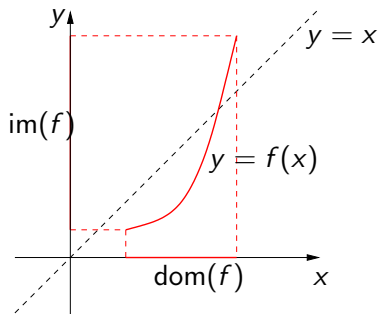


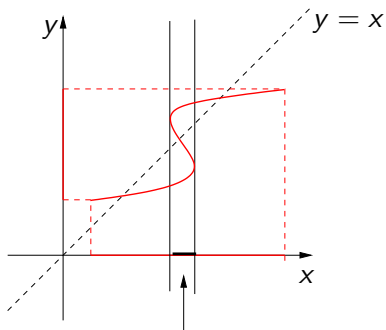
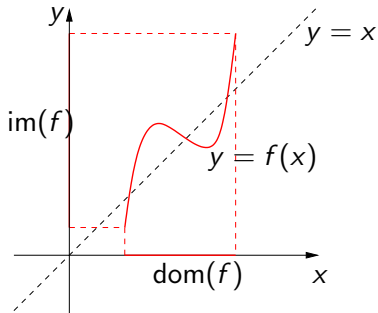
Funzione inversa

$$\text{dom}(f^{-1}) = \text{im}(f),$$

$$\text{im}(f^{-1}) = \text{dom}(f)$$

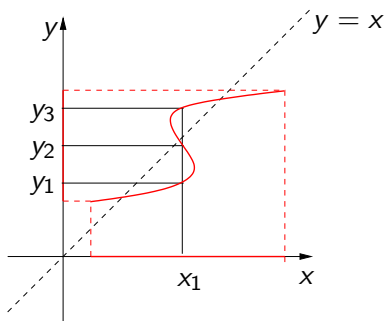
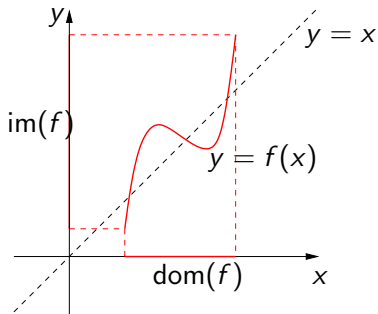
Grafico della funzione inversa





$y = f(x)$ NON è iniettiva e **NON** è invertibile,
 ovvero la curva a destra non è il grafico di alcuna funzione,
 ad una x corrisponde più di una y





$f(x)$ NON è iniettiva e **NON** è invertibile,
 ovvero la curva a destra non è il grafico di alcuna funzione,
 ad una x corrisponde più di una y



Quindi:

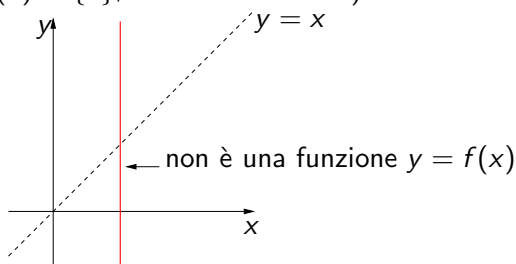
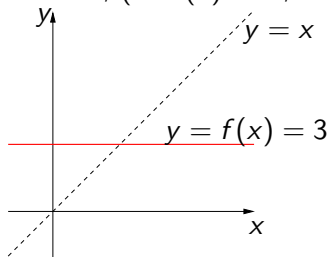
$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ è invertibile se e solo se è suriettiva e iniettiva.

$f : D \rightarrow \text{im}(f)$ è invertibile se e solo se è iniettiva (è già suriettiva su $\text{im}(f)$)

NOTA: quando analizzeremo l'invertibilità, considereremo sempre

$f : D \rightarrow \text{im}(f)$

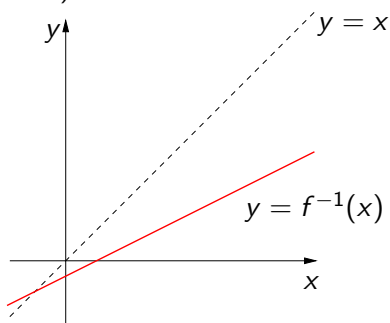
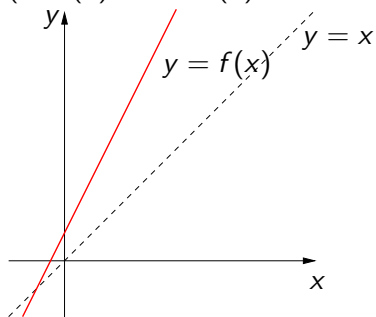
Esempio: $f : \mathbb{R} \rightarrow \text{im}(f)$, $f(x) = 3$ NON è invertibile sul suo dominio; ($\text{dom}(f) = \mathbb{R}$, $\text{im}(f) = \{3\}$, f NON è iniettiva)



$f : \mathbb{R} \longrightarrow \text{im}(f), f(x) = 3x + 2$

f è invertibile sul suo dominio;

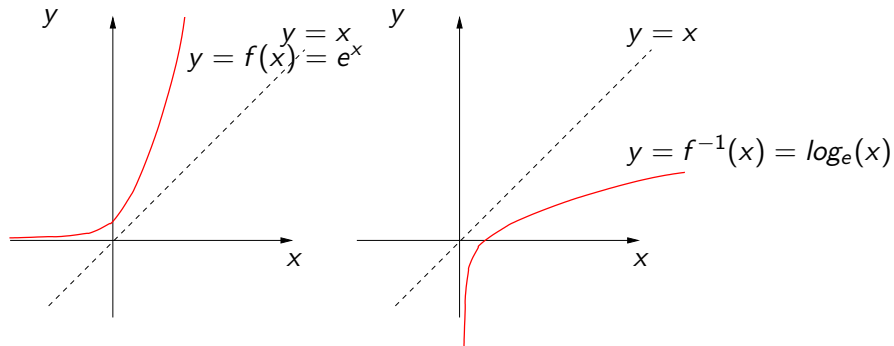
($\text{dom}(f) = \mathbb{R}, \text{im}(f) = \mathbb{R}, f$ è iniettiva)



$$\text{dom}(f^{-1}) = \text{im}(f) = \mathbb{R}, \text{im}(f^{-1}) = \text{dom}(f) = \mathbb{R}.$$



$f : \mathbb{R} \longrightarrow \text{im}(f), f(x) = e^x$
 f è invertibile sul suo dominio;
 $(\text{dom}(f) = \mathbb{R}, \text{im}(f) = \mathbb{R}_+, f \text{ è iniettiva})$



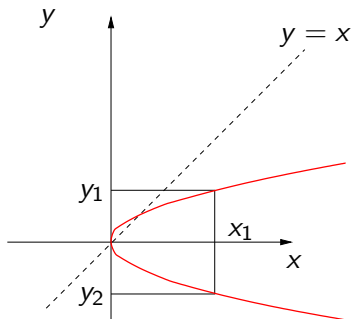
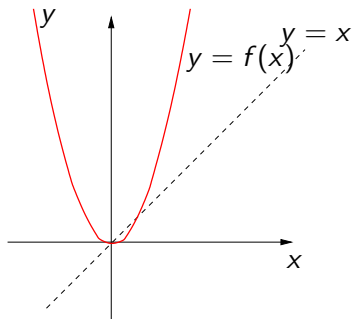
$$\text{dom}(f^{-1}) = \text{im}(f) = \mathbb{R}_+, \text{im}(f^{-1}) = \text{dom}(f) = \mathbb{R}$$



$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \text{im}(f), f(x) = x^2$$

f NON è invertibile sul suo dominio;

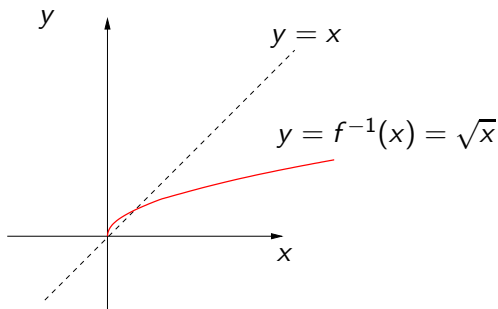
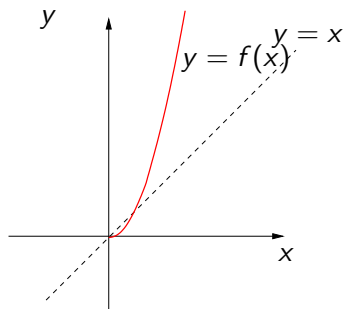
($\text{dom}(f) = \mathbb{R}$, $\text{im}(f) = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, f NON è iniettiva)



$$f : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \longrightarrow \text{im}(f), f(x) = x^2$$

f è invertibile sull'insieme di definizione $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$

($\text{dom}(f) = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $\text{im}(f) = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, f è iniettiva)



$$\text{dom}(f^{-1}) = \text{im}(f) = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \text{im}(f^{-1}) = \text{dom}(f) = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$$



Funzioni matematiche elementari

Funzioni polinomiali e razionali

retta: $y = f(x) = mx + q$, con $m, q \in \mathbb{R}$ assegnati.

parabola: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ assegnati.

cubica: $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ assegnati.

razionale: $y = f(x) = 1/x$, $y = f(x) = \frac{3x+5}{x^2-4}, \dots$

Funzioni trigonometriche

seno: $y = \sin(x)$

coseno: $y = \cos(x)$

tangente: $y = \operatorname{tg}(x)$

cotangente: $y = \operatorname{cotg}(x), \dots$

Funzioni trascendenti

esponenziale: $y = a^x$, con $a \in \mathbb{R}_+$

logaritmo: $y = \log_a(x)$, con $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$

caso particolare: $a = e = 2.718281828459\dots$ (**Numero di Nepero**)

Funzioni irrazionali

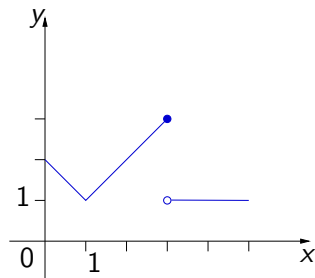
radice: $y = \sqrt{(x)}$, $y = \sqrt[3]{(x)} \dots$



Funzioni definite a tratti

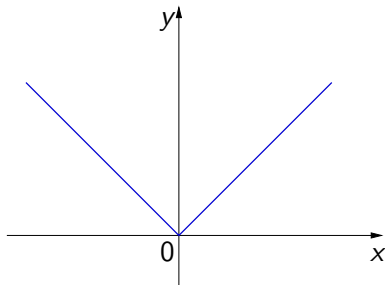
Sono funzioni reali di variabile reale ($f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) definite da espressioni diverse su intervalli diversi:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x & \text{se } 1 < x \leq 3 \\ 1 & \text{se } 3 < x \leq 5 \end{cases}$$



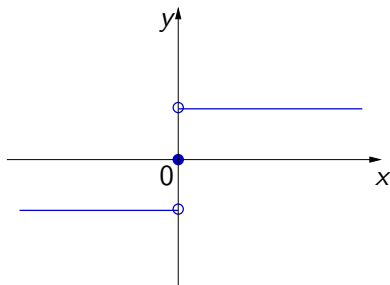
Funzione Valore Assoluto

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Funzione Segno

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} : f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



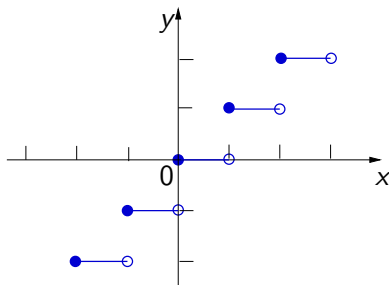
Funzione Parte Intera

E' la funzione che associa ad un numero reale x il più grande numero intero (in \mathbb{Z}) minore o uguale a x :

se $x = 3.4524$, $[x] = 3$, se $x = 2$, $[x] = 2$,

se $x = -12.786786$, $[x] = -13$.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} : f(x) = [x]$$



Successioni

Def. Una **successione** è una funzione reale ($Y = \mathbb{R}$) a variabile naturale, ovvero $X = \mathbb{N}$:

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : \quad n \mapsto y = a(n) = a_n.$$

Il **dominio** di una successione è del tipo $\{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\}$ con n_0 un opportuno numero naturale.

Es. $a_n = \frac{1}{n}$, in questo caso $n_0 = 1$.

Es. $a_n = \frac{n+1}{n-2}$, in questo caso $n_0 = 3$.

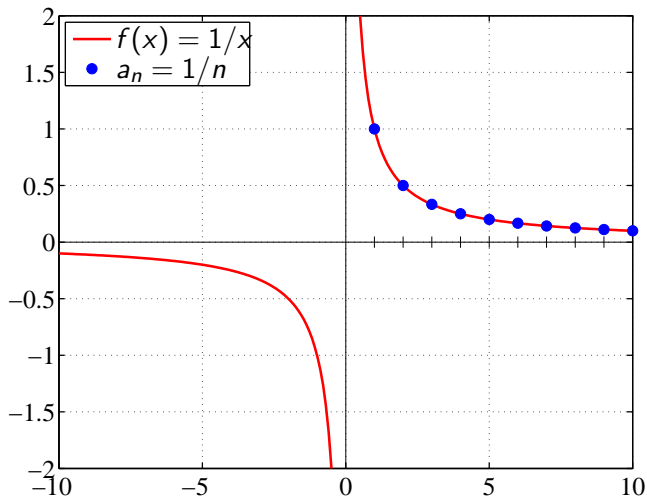
Es. $a_n = (-1)^n$, in questo caso $n_0 = 0$.

Es. Il **fattoriale di n** : $a_n = n!$, $n \in \mathbb{N}$.

$0! := 1$, $n! := n \cdot (n-1)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 2 \cdot 1$



Confronto tra $f(x) = 1/x$ e $a_n = 1/n$



$$\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}, x \neq 0\},$$

$$\text{dom}(a) = \{n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$$

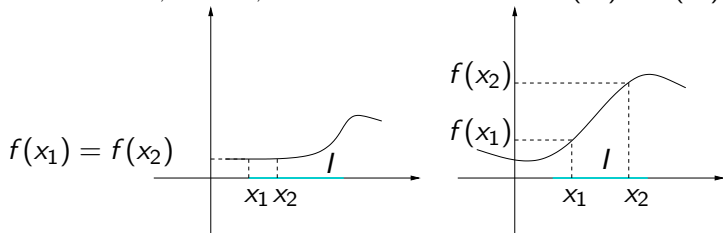


Funzioni monotone

Sia I il dominio di una funzione f reale a valori reali, oppure un intervallo contenuto nel dominio di f .

Def. La funzione f si dice **monotona crescente su I** se

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$



Def. La funzione f si dice **monotona strettamente crescente su I** se

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$



Analogamente si definisce una funzione **monotona decrescente** su I se

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)$$

e **monotona strettamente decrescente** su I se

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Proposizione. Se f è strettamente monotona sul suo dominio allora f è iniettiva.

Dim. Sia f strettamente monotona crescente, allora

$\forall x_1, x_2 \in \text{dom}(f)$ con $x_1 < x_2$ ($x_1 \neq x_2$) si ha $f(x_1) < f(x_2)$ e quindi $f(x_1) \neq f(x_2)$, ovvero f è iniettiva.

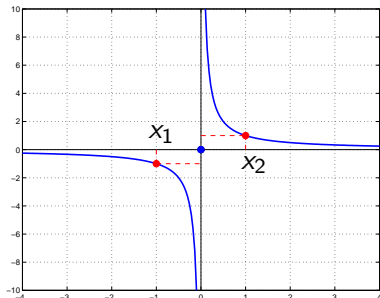
Dimostrazione analoga si ha per f strettamente monotona decrescente. \square



Il viceversa non è vero. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è iniettiva senza essere strettamente monotona sul suo dominio.



$\text{dom}(f) = \mathbb{R}$.

f è decrescente su $(-\infty, 0)$,
è decrescente su $(0, +\infty)$, ma
non è decrescente su tutto \mathbb{R} .

Infatti per $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, si ha $f(x_1) = -1 < f(x_2) = 1$.



Funzioni composte

Siano X , Y e Z tre insiemi in \mathbb{R} . Siano $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$.
Definiamo una nuova funzione $h : X \rightarrow Z$ detta **funzione composta di f e g** tale che

$$h(x) = g(f(x))$$

Es. $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = x^2$.

La funzione composta è: $h(x) = g(f(x)) = (\sin(x))^2$.
 $f(x)$ prende il posto di x nella definizione di g .

Es. Sia $h(x) = \log(2x + 1)$.

Posso vedere $h(x) = g(f(x))$ con $g(x) = \log(x)$ e $f(x) = 2x + 1$.

Es. Sia $h(x) = \sqrt{\frac{2x + 1}{x^2}}$.

Posso vedere $h(x) = g(f(x))$ con $g(x) = \sqrt{x}$ e $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2}$.



Dominio di una funzione composta

Il dominio di una funzione f è il sottoinsieme di \mathbb{R} su cui f è definita, ovvero l'insieme

$$\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

Prendiamo $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ e $g(x) = \sqrt{x}$,

$$h(x) = g(f(x)) = \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}.$$

$$x \in \text{dom}(h) \Leftrightarrow (x \in \text{dom}(f) \quad \text{e} \quad f(x) \in \text{dom}(g))$$

Quindi $x \in \text{dom}(h)$ sse $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e $\frac{x+2}{x-1} \geq 0$, ovvero
 $\text{dom}(h) = (-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$.

$$\text{Quando } h(x) = g(f(x)), \\ \text{dom}(h) = \{x \in \text{dom}(f) : f(x) \in \text{dom}(g)\}$$



Oss. La composizione di funzioni non è commutativa:

$$g(f(x)) \neq f(g(x)) \text{ in genere.}$$

$$f(x) = \sin(x) \text{ e } g(x) = x^2.$$

$$g(f(x)) = (\sin(x))^2 \quad \text{mentre} \quad f(g(x)) = \sin(x^2).$$

Proprietà. Se f e g sono invertibili e $z = h(x) = g(f(x))$, allora è invertibile anche h e vale

$$h^{-1}(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)).$$

Proprietà. Se f e g sono entrambe monotone **crescenti** (o entrambe **decrescenti**) allora $g(f(x))$ sarà monotona **crescente**.
 $g(f(x))$ sarà monotona **decrescente** negli altri casi.



Funzione elevamento a potenza

$$y = x^\alpha \text{ con } x \in \mathbb{R} \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Distinguiamo vari casi:

● $\alpha = 0 \Rightarrow y = x^0 = 1$ funzione costante.

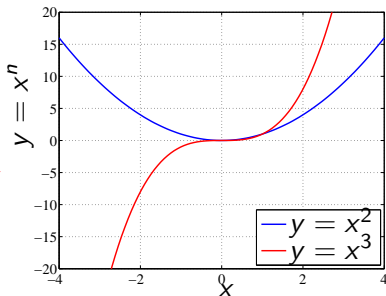
$\text{dom}(f) = \mathbb{R}$. $\text{im}(f) = \{1\}$.

● $\alpha = n \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow y = x^n$.

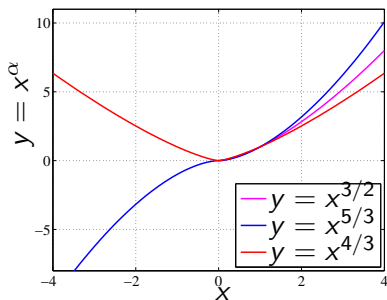
$\text{dom}(f) = \mathbb{R}$.

Se n è pari, $\text{im}(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

Se n è dispari, $\text{im}(f) = \mathbb{R}$



$\alpha = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, con $n, m \in \mathbb{N}^+$ primi fra loro,
 $\Rightarrow y = x^{n/m} = \sqrt[m]{x^n}$.

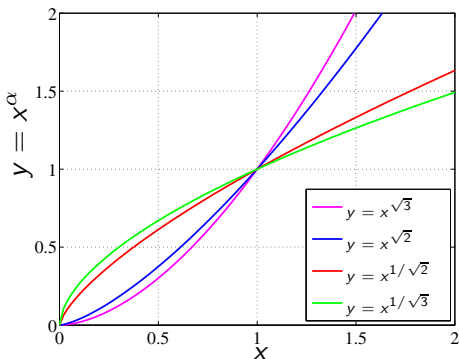


n	m	Esempio	$\text{dom}(f)$	$\text{im}(f)$
dispari	pari	$y = x^{3/2}$	$\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$	$\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
dispari	dispari	$y = x^{5/3}$	\mathbb{R}	\mathbb{R}
pari	dispari	$y = x^{4/3}$	\mathbb{R}	$\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$



● $\alpha > 0$ irrazionale ($\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}^+$).

$\text{dom}(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ e $\text{im}(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$



Se $x \geq 1$, definisco $y = x^\alpha := \sup\{x^{n/m} : \frac{n}{m} \leq \alpha\}$

Se $0 \leq x < 1$, definisco $y = x^\alpha := \inf\{x^{n/m} : \frac{n}{m} \leq \alpha\}$

Se $x < 0$, x^α non è definito.

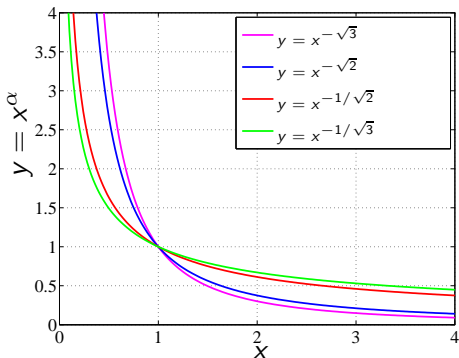


 $\alpha < 0$ irrazionale ($\alpha \in \mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Q}^-$)

Poniamo $\beta = -\alpha$, se $\alpha < 0 \Rightarrow \beta > 0$ e $x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}} = \frac{1}{x^\beta}$

Il dominio di x^α coincide con il dominio di $x^{-\alpha}$ privato dello zero, ovvero è \mathbb{R}^+ .

Le funzioni x^α con $\alpha < 0$ sono strettamente decrescenti su \mathbb{R}^+ .



Dominio di $f(x) = (h(x))^{g(x)}$

Consideriamo $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

A priori l'esponente $g(x)$ può assumere un valore reale positivo nullo o negativo.

Quindi la funzione $f(x)$ è ben definita se la base $h(x)$ è definita e t.c. $h(x) > 0$ e se $g(x)$ è definita, ovvero

$$\text{dom}(f) = \{x \in \text{dom}(h) : h(x) > 0\} \cap \text{dom}(g)$$

Es. Determinare il dominio di $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

$$\begin{aligned} \text{dom}(f) &= \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : 1 + \frac{1}{x} > 0\right\} \cap \mathbb{R} = \\ &= (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \end{aligned}$$



Funzioni polinomiali

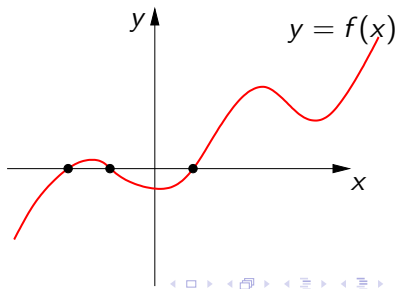
Una funzione si dice **polinomiale** se è del tipo

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

ovvero è un polinomio nella variabile x . I coefficienti a_i , con $i = 0, \dots, n$ sono reali. n è detto grado del polinomio.

Dominio: $\forall x \in \mathbb{R}$, e $a_i \in \mathbb{R}$, l'espressione $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ è ancora un numero reale. Quindi $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$.

Si definiscono **radici** o **zeri** di un polinomio i valori di $x \in \mathbb{R}$ tali per cui $f(x) = 0$, ovvero sono le intersezioni tra il grafico di $f(x)$ e l'asse delle ascisse:



Funzioni razionali

Una funzione si dice **razionale** (o **fratta**) se è il rapporto di due polinomi:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

$a_i, b_j \in \mathbb{R}$, con $i = 0, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$

Dominio: $\forall x \in \mathbb{R}$, e $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, numeratore e denominatore sono numeri reali. Il rapporto tra due numeri reali è un numero reale se il denominatore è diverso da zero. Quindi
 $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\text{insieme degli zeri del denominatore}\}$.



Funzioni esponenziali e logaritmiche

Sia $a \in \mathbb{R}^+$. Una funzione si dice **esponenziale** se la variabile indipendente x compare all'esponente di a (detto base):

$$f(x) = a^x$$

Per le considerazioni fatte prima, poiché $a > 0$, $f(x)$ assume valori reali $\forall x \in \mathbb{R}$, quindi

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}f = (0, +\infty).$$

$$\text{Inoltre } f(0) = a^0 = 1.$$

Sia $a \neq 1$. Una funzione si dice **logaritmica** se la variabile indipendente x compare all'argomento del logaritmo di base a :

$$f(x) = \log_a(x) = \log_a x$$

Ricordiamo che

$$y = \log_a x \quad \Leftrightarrow a^y = x$$

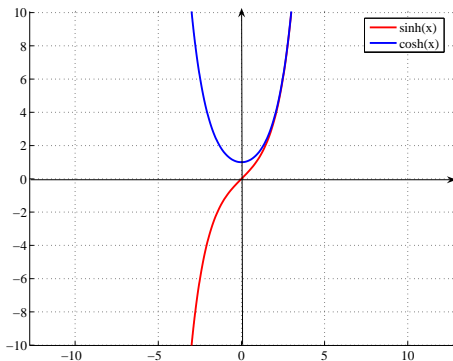
ovvero la funzione logaritmo è la funzione inversa dell'esponenziale, quindi $\text{dom}(f) = (0, +\infty)$.



Funzioni iperboliche

$$\sinh(x) =: \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) =: \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



La relazione fondamentale tra \sinh e \cosh è:

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

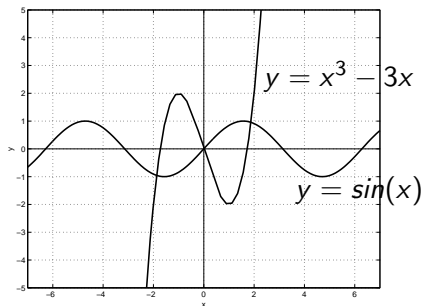
$\sinh(t)$ e $\cosh(t)$ sono dette funzioni **iperboliche** perché un punto $P = (x_P, y_P)$ del piano cartesiano con $x_P = \cosh(t)$ e $y_P = \sinh(t)$, al variare di t appartiene all'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$.



Simmetrie di funzione

Def. Una funzione si dice **dispari** se $f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in \text{dom}(f)$ (equivalentemente $-f(x) = f(-x)$).

Es. $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = x^3$ sono dispari.



Verifica: scrivo $f(-x)$:

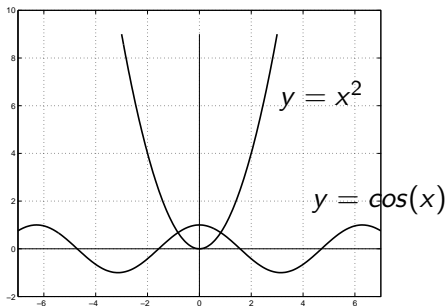
$$f(-x) = (-x)^3 + 3(-x) = -(x^3 + 3x) = -f(x).$$

scrivo $g(-x)$: $g(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -g(x).$



Def. Una funzione si dice **pari** se $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \text{dom}(f)$
(è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate $x = 0$).

Es. $f(x) = x^2$, $g(x) = \cos(x)$ sono funzioni pari.



Verifica: scrivo $f(-x)$: $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

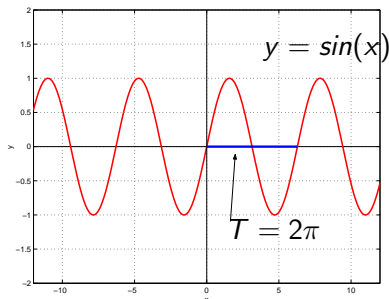
scrivo $g(-x)$: $g(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = g(x)$.



Funzioni periodiche

Def. Una funzione si dice **periodica** di periodo T se $\forall x \in \text{dom}(f)$ si ha $f(x + T) = f(x)$.

Es. $f(x) = \sin(x)$ con $T = 2\pi$.



Verifica: $f(x + T)$:

$$f(x + T) = f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin(x) = f(x).$$



Riferimento bibliografico

Canuto-Tabacco, cap. 2.

Esercizi:

- 1) Individuare dominio e insieme immagine delle funzioni elementari viste ad esercitazione e dire se sono monotone (crescenti o decrescenti) sul loro dominio, se sono iniettive, suriettive, biettive, invertibili.
- 2) Esercizi del cap. 2 del libro Canuto-Tabacco.

