Analisi Matematica 1

A.A. 2018/19

Ingegneria Informatica
Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni
cognomi M-Z

Paola Gervasio

orario di ricevimento: LUN. 11:30 - 13:30
Edificio di via Valotti, piano terra, tel. 030-3715734

e-mail: paola.gervasio@unibs.it

web: http://paola-gervasio.unibs.it

DURATA DELLE LEZIONI: fino al 21 dicembre 2018

4 ore di lezione alla settimana:

MER. 10:30-12:30, Aula N9

VEN. 8:30-10:30, Aula MTA

4 ore di esercitazione alla settimana:

MAR. 14:30-16:30, Aula MTA

GIO. 11:30-13:30, Aula Magna

ATTENZIONE alle comunicazioni sulla pagina web del corso:
`paola-gervasio.unibs.it/Analisi1`

MODALITÀ D'ESAME:

Prova Scritta (voto ≥ 16) + Prova orale

5 APPELLI IN UN ANNO ACCADEMICO

PRIMA SESSIONE D'ESAME:

dal giorno 07.01.2019 al giorno 14.02.2019 (2 appelli)

TEST INTERMEDIO: a novembre

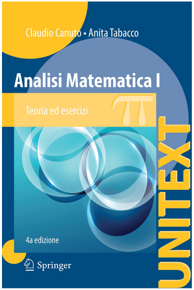
Chi supera positivamente il PRIMO TEST può svolgere un SECONDO TEST (in contemporanea con il primo appello d'esame).

Chi supera positivamente ENTRAMBI I TEST è esentato dalla prova scritta e accede alla prova orale.

TESTO DI RIFERIMENTO

C. Canuto, A. Tabacco: Analisi Matematica 1, Ed. Springer Italia, 2014 (quarta edizione)

http://calvino.polito.it/canuto-tabacco/analisi_1/



PREREQUISITI

- operazioni elementari senza uso della calcolatrice
- calcolo letterale (prodotti notevoli)
- geometria analitica nel piano: retta, parabola, crf, iperbole, ellisse
- logaritmi e potenze: definizioni e proprietà
- elementi di goniometria e trigonometria
- equazioni di 1^o e 2^o grado, irrazionali, fratte, logaritmiche, esponenziali, goniometriche
- disequazioni (e sistemi di disequazioni): intere, razionali, irrazionali, fratte, logaritmiche, esponenziali, goniometriche

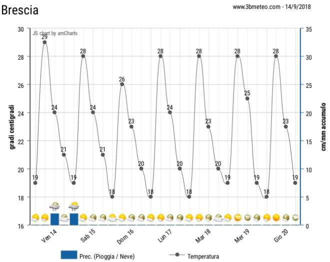
L'ANALISI MATEMATICA è una branca della matematica che si basa sul Calcolo infinitesimale, cioè lo studio del **comportamento locale** di FUNZIONI mediante il concetto di LIMITE.

Due ingredienti fondamentali:

1. FUNZIONI
2. LIMITI

Nell'ANALISI MATEMATICA I si lavora con funzioni che dipendono da una sola variabile ($y = f(x)$) ed è il punto di partenza per studi più complessi su funzioni a più variabili.

Un esempio di funzione ad una variabile: la temperatura dell'aria a Brescia al variare del tempo:



$t=$ tempo è una variabile INDIPENDENTE (il tempo varia in maniera autonoma, indipendente)
$T=$temperatura è una variabile DIPENDENTE dal tempo: $T = f(t)$. Si dice che è una FUNZIONE del tempo.

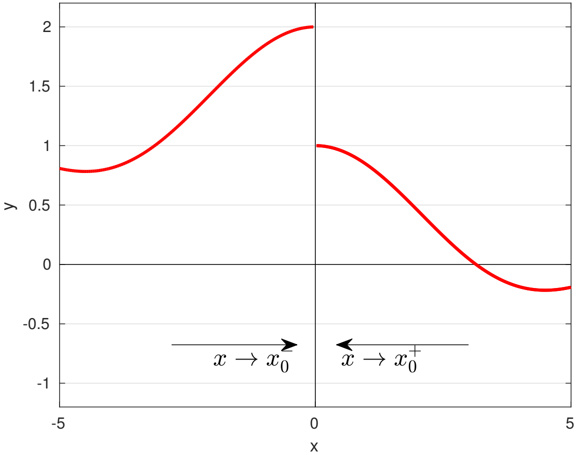
Funzioni a più variabili

Più in generale la temperatura dipende dalla posizione nello spazio (longitudine (x), latitudine (y), altitudine (z)) oltre che dal tempo (t), quindi è una funzione di 4 variabili indipendenti
$T = f(x, y, z, t)$
Altro esempio è la concentrazione c di un inquinante nell'aria: anch'essa dipende da 4 variabili: $c = f(x, y, z, t)$

In Analisi 1 ci limitiamo a studiare funzioni che dipendono da una sola variabile indipendente.

Concetto intuitivo di limite

Consideriamo la funzione $y = f(x)$ in figura



Vogliamo capire come cambia la variabile dipendente y quando la variabile indipendente x si avvicina a zero.

Stiamo facendo uno studio locale.

Da dove partire:

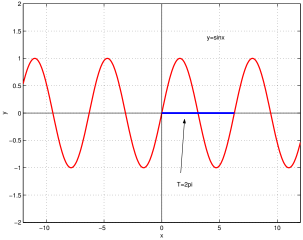
1. Nozioni di base: Logica, formalismo del linguaggio matematico

$$\forall I_\varepsilon(\ell)\exists I_\delta(x_0):\ \forall x \in \mathrm{dom} f \cap I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}\ \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$$

2. Insiemi numerici: .... Numeri Reali

$$\mathbb{R} = \{0, \pm 1, \pm 2, ..., \sqrt{2}, \pi, e, \frac{3}{5}, ...\}$$

3. Funzioni: $f(x) = \sin(x)$



4. Limiti........

ELEMENTI DI INSIEMISTICA

- Definizione di insieme e simboli
- Operazioni fra insiemi
- Caratterizzazione di un insieme
- Prodotto cartesiano fra insiemi

Si veda il corso di ALGEBRA E GEOMETRIA

ELEMENTI DI LOGICA

Def. Una **Proposizione logica** è una frase di cui si può dire, senza equivoco, se è VERA o FALSA, cioè porta con sè un *valore di verità*.

Esempi:
'Mercurio è un pianeta', 'Milano è in Egitto' sono proposizioni logiche
'Milano è lontana da Roma', 'Il giallo è un bel colore' NON sono proposizioni logiche.
Le proposizioni logiche verranno indicate con delle lettere:
$\mathcal{P}$='Mercurio è un pianeta'

I PREDICATI

Def. Un **PREDICATO LOGICO** è un enunciato $\mathcal{P}(x, ...)$ dipendente da una o più variabili $x, ...$, scelte in un insieme opportuno.
Un predicato diventa una proposizione (V o F) nel momento in cui le variabili vengono fissate, oppure quando vengono utilizzati i quantificatori.

Es. Sia x un numero intero positivo. $\mathcal{P}(x)$='x è un numero primo' è un predicato.
$\mathcal{P}(7)$ è una proposizione Vera,
$\mathcal{P}(10)$ è una proposizione Falsa.

QUANTIFICATORI

OSSERVAZIONE. Dato un predicato $\mathcal{P}(x)$ con x appartenente ad un certo insieme X, può interessare sapere se $\mathcal{P}(x)$ è vera per tutti gli elementi x di quell'insieme, oppure se esiste almeno un elemento x di X per cui $\mathcal{P}(x)$ è vera.
Si introducono i **quantificatori**.
quantificatore universale:

$\forall\, x, \mathcal{P}(x)$ si legge per ogni x vale $\mathcal{P}(x)$

quantificatore esistenziale:

$\exists\, x, \mathcal{P}(x)$ si legge
esiste almeno un x per cui vale $\mathcal{P}(x)$

$\exists!\, x, \mathcal{P}(x)$ si legge
esiste un unico x per cui vale $\mathcal{P}(x)$

$$\left.\begin{array}{l}\forall\ x, \mathcal{P}(x) \\ \exists\ x, \mathcal{P}(x) \\ \exists!\ x, \mathcal{P}(x)\end{array}\right\}$$ sono proposizioni logiche e possono assumere valore vero o falso.

Es. Sia $x \in \mathbb{N}$, definisco $\mathcal{P}(x)$='x è un numero primo'.

$\forall\ x, \mathcal{P}(x)$='ogni numero naturale è primo' è FALSA

$\exists\ x, \mathcal{P}(x)$='esiste almeno un numero naturale primo' è VERA

$\exists!\ x, \mathcal{P}(x)$='esiste un unico numero naturale primo' è FALSA

CONNETTIVI LOGICI

A partire da proposizioni logiche, se ne possono costruire altre mediante i *connettivi logici*.
I *connettivi logici* sono operazioni che agiscono su proposizioni.
negazione: $\neg\mathcal{P}$ (si legge **non**$\mathcal{P}$): è la negazione di $\mathcal{P}$.
Se $\mathcal{P}$ è Vera, allora $\neg\mathcal{P}$ è Falsa e viceversa.
Es. $\mathcal{P}=$'Mercurio è un pianeta', $\neg\mathcal{P}=$ 'Mercurio non è un pianeta'.
congiunzione: $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ (si legge $\mathcal{P}$ **e** $\mathcal{Q}$): è una proposizione Vera solo se entrambe $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono Vere, Falsa in tutti gli altri casi.
disgiunzione: $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ (si legge $\mathcal{P}$ **o** $\mathcal{Q}$): è una proposizione Falsa solo se entrambe $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono False, Vera in tutti gli altri casi.

Es. $\mathcal{P}=$'5 è un numero dispari', $\mathcal{Q}=$'4 è un numero primo'. $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ è FALSA, $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ è VERA.
Es. $\mathcal{P}=$'5 è un numero dispari', $\mathcal{Q}=$'4 è un numero pari'. $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ è VERA.

Negazione di quantificatori e predicati

OSSERVAZIONE. I connettivi logici possono essere applicati anche ai predicati con quantificatori

$\neg(\forall x, \mathcal{P}(x))$	è equivalente a	$\exists x, \neg\mathcal{P}(x)$
$\neg(\exists x, \mathcal{P}(x))$	è equivalente a	$\forall x, \neg\mathcal{P}(x)$

Es. X è l'insieme delle città italiane e x una città italiana
$\mathcal{P}(x)$='x è una città di mare'

$\forall x, \mathcal{P}(x)$ si legge 'qualunque città italiana è una città di mare.' (Falsa)

La sua negazione è:
$\exists\ x, \neg\mathcal{P}(x)$ si legge 'esiste almeno una città italiana che non è una città di mare.' (Vera)

UN ALTRO CONNETTIVO LOGICO

L'implicazione: $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ (si legge $\mathcal{P}$ **implica** $\mathcal{Q}$).

($\mathcal{P}$ **implica** $\mathcal{Q}$) è una proposizione Falsa solo se $\mathcal{P}$ è Vera e $\mathcal{Q}$ è Falsa, Vera in tutti gli altri casi (si esclude che da una premessa Vera si possa ottenere una conclusione Falsa).

Es.

Sono iscritto all'università, allora ho superato l'esame di maturità

$$\mathcal{P} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{Q}$$

Condizione necessaria, condizione sufficiente

Nella scrittura $\mathcal{P}$ **implica** $\mathcal{Q}$, si dice che $\mathcal{P}$ è **condizione sufficiente** per $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}$ è **condizione necessaria** per $\mathcal{P}$.

Es. Sono iscritto all'università, allora ho superato l'esame di maturità.
Il fatto che io sia iscritto all'università è condizione sufficiente a garantire che io abbia superato l'esame di maturità.
Il fatto che io abbia superato l'esame di maturità è condizione necessaria (cioè è una conseguenza) al fatto che io sia iscritto all'università.

Attenzione che se è vero che $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, NON È DETTO che sia automaticamente vero che $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.
Riprendiamo l'esempio di prima:
il fatto che io abbia superato l'esame di maturità non implica che io sia iscritto all'università.

In alcuni casi può succedere che si abbiano contemporaneamente $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$,

allora si usa la doppia implicazione o equivalenza logica o condizione necessaria e sufficiente: $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ (si legge $\mathcal{P}$ **se e solo se** $\mathcal{Q}$): è una proposizione Vera se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono entrambe Vere o entrambe False, altrimenti è Falsa.

Es. Ho superato l'esame di maturità, allora ho preso un voto maggiore o uguale a 60.
Vale anche il viceversa:
Ho preso un voto maggiore o uguale a 60 (alla maturità), allora ho superato l'esame di maturità.
Si formalizza con $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$.
Diciamo anche che: "$\mathcal{P}$ è condizione necessaria e sufficiente a $\mathcal{Q}$"

Un teorema è costituito da un enunciato e da una dimostrazione. L'enunciato ha una **IPOTESI** ($\mathcal{P}$, il punto di partenza) ed una **TESI** ($\mathcal{Q}$ l'obiettivo da dimostrare) e si sintetizza con

$$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}.$$

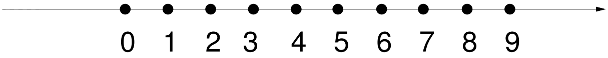
Per dimostrare un teorema si possono usare REGOLE DI DIMOSTRAZIONE diverse, ma tra loro equivalenti.

1. $\mathcal{P} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Q}$
2. $\neg\mathcal{Q} \quad \Rightarrow \quad \neg\mathcal{P}$
3. $\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q} \quad \Rightarrow \quad \neg\mathcal{P}$
4. $\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{R},$ dove $\mathcal{R}$ è un'altra proposizione.

Le regole 2., 3. e 4. sono dette *regole di dimostrazione per assurdo.*

GLI INSIEMI NUMERICI

Numeri **naturali**: $\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3, ...\}$



operazioni interne (il risultato sta in $\mathbb{N}$): somma e prodotto

proprietà: commutativa $n_1 + n_2 = n_2 + n_1$ e $n_1 \cdot n_2 = n_2 \cdot n_1$

associativa $(n_1 + n_2) + n_3 = n_1 + (n_2 + n_3)$ e

$(n_1 \cdot n_2) \cdot n_3 = n_1 \cdot (n_2 \cdot n_3)$

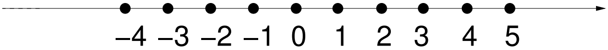
distributiva $n_1 \cdot (n_2 + n_3) = n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_3$

$\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{n \in \mathbb{N} :\ n > 0\}$

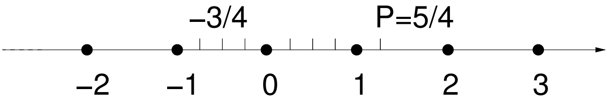
Numeri **interi**: $\mathbb{Z} = \{0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, ...\}$

operazioni interne: somma, prodotto e sottrazione

$\mathbb{Z}^+ = \{z \in \mathbb{Z} :\ z > 0\}$



Numeri **razionali**: $\mathbb{Q} = \{r = p/q,\ \ p \in \mathbb{Z},\ \ q \in \mathbb{N}_+\}$
operazioni interne: somma, prodotto, sottrazione e divisione per un numero non nullo.



Un numero razionale ha una *rappresentazione decimale limitata*, le cifre dopo la virgola sono nulle da un certo punto in poi oppure, da un certo punto in poi, si ripetono periodicamente infinite volte.
Es. $r = -351.4500 = -351.45$, $s = 12.234343434 = 12.2\overline{34}$.
In $\mathbb{Q}$ tutte le operazioni artimetiche elementari sono interne, ma esistono dei numeri che non sono razionali, es. $\sqrt{2}$, π, ...

I numeri reali

Numeri **reali**: $\mathbb{R} = \{$ tutti i numeri decimali razionali e irrazionali (ovvero con infinite cifre dopo la virgola non periodici)$\}$
Esempi di numeri irrazionali:
$\pi = 3.1415....,\quad e = 2.71828....,\quad \sqrt{2} = 1.4142....$
operazioni interne: somma, prodotto, sottrazione e divisione per un numero non nullo.

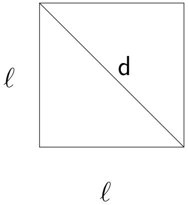
Oss. L'insieme dei numeri reali è identificato con una retta: ogni punto della retta è associato ad uno ed un solo numero reale.

Si hanno le inclusioni:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

La necessità di utilizzare numeri irrazionali risale all'antichità:

• per esprimere la lunghezza d della diagonale di un quadrato in funzione della lunghezza ℓ del lato del quadrato:



Teorema di Pitagora:
$d^2 = \ell^2 + \ell^2 = 2\ell^2$

Questo significa che $\quad \exists p |\ p^2 = 2$.
Ovvero: $\quad d^2 = 2\ell^2 = p^2\ell^2, \quad$ e quindi $d^2 = (p\ell)^2$, cioè $d = p\ell$ e $p = \sqrt{2}$.

• per esprimere la lunghezza c della circonferenza in funzione della lunghezza r del raggio: $c = 2\pi r$.
PROBLEMA: Come faccio ad affermare che $p = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$?

Teorema. Se il numero positivo p soddisfa $p^2 = 2$, allora $p = \sqrt{2}$ non è razionale.

Dimostrazione

L'ipotesi è $\mathcal{P}$='il numero positivo p soddisfa $p^2 = 2$',
la tesi è $\mathcal{Q}$='$p = \sqrt{2}$ non è razionale'.

Usiamo la dimostrazione per assurdo $\quad \mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R} \wedge \neg\mathcal{R}$.

All'ipotesi $\mathcal{P}$ aggiungiamo l'ipotesi $\neg\mathcal{Q}$='p è razionale'.
Per dimostrare il teorema devo dimostrare che esiste una proposizione $\mathcal{R}$ che è contemporaneamente VERA e FALSA.

Per definizione dei numeri razionali posso scrivere $p = m/n$ dove $m, n \in \mathbb{N}^+$ con m e n primi fra loro.
$\mathcal{R}$='m e n sono primi fra loro'.
Devo dimostrare che vale $\neg\mathcal{R}$='m e n NON sono primi fra loro'.

Elevando al quadrato $p = m/n$ si ha $2 = p^2 = m^2/n^2$, ovvero $m^2 = 2\ n^2$.
Qualunque sia n, m^2 è pari, quindi anche m è pari,
ovvero posso scrivere $m = 2k$, con $k \in \mathbb{N}$.
Di conseguenza l'uguaglianza $m^2 = 2\ n^2$ diventa $(2k)^2 = 2n^2$, ovvero $4k^2 = 2n^2$, ovvero $2k^2 = n^2$.
Per lo stesso ragionamento, confrontando k e n nell'uguaglianza $2k^2 = n^2$, si ha che anche n è pari.
Ho dimostrato che m e n NON sono primi tra loro, ovvero vale $\neg\mathcal{R}$, e questo equivale ad aver dimostrato che $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

$\square$

Proprietà di $\mathbb{R}$

1. Le operazioni aritmetiche definite su $\mathbb{Q}$ si estendono a $\mathbb{R}$ con analoghe proprietà.

2. Su $\mathbb{R}$ c'e' un **ordinamento totale**

3. I numeri razionali sono **densi** tra i numeri reali, ovvero tra due numeri reali qualsiasi, esistono infiniti numeri razionali.

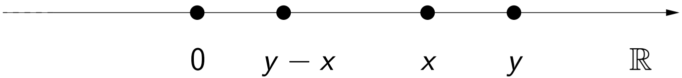
4. L'insieme dei numeri reali è **completo**: geometricamente vuol dire che ogni punto della retta è associato ad un unico numero reale. Questa proprietà permette di risolvere equazioni come $x^2 - 2 = 0$ che non hanno soluzione in $\mathbb{Q}$.

2. ORDINAMENTO DEI NUMERI REALI

I numeri reali diversi da zero si dividono in positivi ($x > 0$ o $x \in \mathbb{R}_+$) e negativi ($x < 0$ o $x \in \mathbb{R}_-$).

Si introduce un **ordinamento** tra numeri reali come segue: siano $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\text{diciamo che } x < y \qquad \text{se e solo se} \qquad y - x > 0.$$



L'ordinamento è **totale**, ovvero presi due qualsiasi numeri reali distinti è sempre vera una delle due condizioni:

$$x < y \qquad \text{o} \qquad y < x.$$

Si pone:

$$x \leq y \qquad \Leftrightarrow \qquad x < y \text{ oppure } x = y.$$

La relazione d'ordine $' \leq '$ interagisce con le operazioni algebriche di somma e prodotto:

$$\text{se } x \leq y \text{ e } \forall z \in \mathbb{R}, \text{ allora } x + z \leq y + z$$

noto come Primo principio di equivalenza delle disequazioni

e

$$\text{se } x \leq y \text{ e se } \begin{cases} z \geq 0 & \text{allora } x \cdot z \leq y \cdot z \\ z < 0 & \text{allora } x \cdot z \geq y \cdot z \end{cases}$$

noto come Secondo principio di equivalenza delle disequazioni

3. $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$

ovvero: Tra due numeri reali qualsiasi esistono infiniti numeri razionali

Es. Consideriamo i numeri reali

$\pi = 3.14159265358979323846264338327 85....$

$x = 3.14159265358979323847264338327 85....$

I numeri

3.1415926535897932384**63**

3.1415926535897932384**64**

$\vdots$

3.1415926535897932384**71**

sono tutti razionali (hanno rappresentazione decimale finita), ma anche

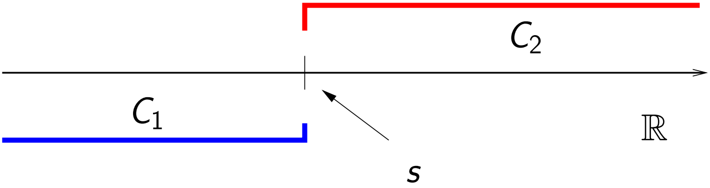
3.1415926535897932384631, 3.1415926535897932384632, ...

3.1415926535897932384639, ..., 3.1415926535897932384709

sono tutti razionali, ecc.

4. La completezza di $\mathbb{R}$

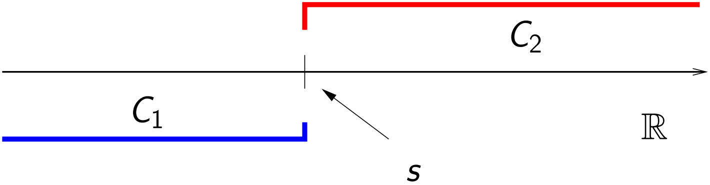
L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ è **completo** ovvero verifica la seguente proprietà detta Assioma di completezza o Assioma di Dedekind. Siano $C_1, \; C_2 \subset \mathbb{R}$ due **classi contigue**, ovvero due sottoinsiemi disgiunti di $\mathbb{R}$ ($C_1 \cap C_2 = \emptyset$) tali che $C_1 \cup C_2 = \mathbb{R}$ e tali che ogni elemento di C_1 sia minore di ogni elemento di C_2.



Allora $\exists! s \in \mathbb{R}$:

$$x_1 \leq s \leq x_2 \qquad \forall x_1 \in C_1, \; \forall x_2 \in C_2.$$

Def. s viene detto **elemento separatore** delle classi.



Geometricamente, la completezza significa che ovunque io tagli in due la retta reale $\mathbb{R}$, il punto di confine s tra le due semirette rappresenta un (!) numero reale. La retta $\mathbb{R}$ è un **continuo** di punti. Al contrario $\mathbb{Q}$ non è rappresentabile con una retta, perché è un sottoinsieme infinito, ma con lacune.

$$\begin{array}{cccccc} \mathbb{R} & = & \mathbb{Q} & \cup & (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \\ \text{reali} & = & \text{razionali} & \cup & \text{irrazionali} \end{array}$$

Sia $\mathbb{Q}$ che $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ sono densi in $\mathbb{R}$.

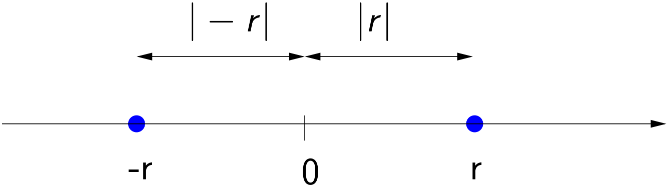
Modulo o "valore assoluto"

Dato $x \in \mathbb{R}$ definiamo modulo o valore assoluto di x il numero reale positivo

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Es. $|5|$ è 5. $\qquad |-2.\overline{34}|$ è $2.\overline{34}$

Dal punto di vista geometrico $|x|$ rappresenta la distanza di x da 0.



Analogamente, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, vale $|x-y| = |y-x|$ e $|x-y|$ rappresenta la distanza tra x e y.

N.B. Una distanza è sempre un numero reale positivo.

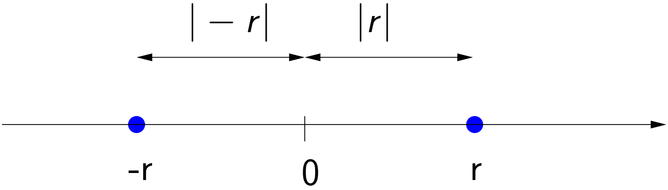
Proprietà del Valore Assoluto

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, vale la relazione:
$|x + y| \leq |x| + |y|$ (disuguaglianza triangolare)

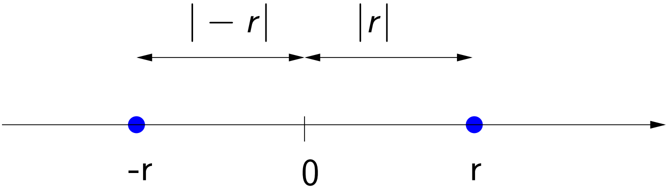
(La dimostrazione è fatta in aula)

Es. $x = 8$, $y = -13$.
$|x + y| = |8 - 13| = |-5| = 5$, $|x| = |8| = 8$,
$|y| = |-13| = 13$
$|x + y| \leq |x| + |y|$ in questo caso è $5 \leq 8 + 13$.

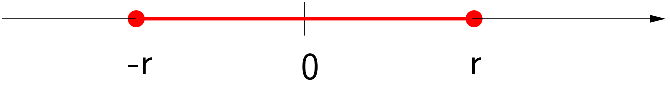
2. L'equazione $|x| = r$, con $r \in \mathbb{R}^+$ assegnato, ha due soluzioni:
$x_1 = r$ e $x_2 = -r$



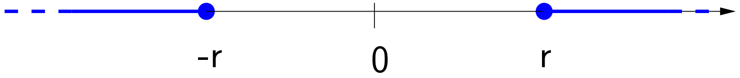
Es. Le soluzioni dell'eqz. $|x| = \sqrt{2}$ sono $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.



3. I punti $x \in \mathbb{R}$ che soddisfano la disequazione $|x| \leq r$ sono tutti e soli i punti $x \in \mathbb{R} : -r \leq x \leq r$, ovvero tutti i punti che distano da zero r o meno di r.



4. I punti $x \in \mathbb{R}$ che soddisfano la disequazione $|x| \geq r$ sono tutti e soli i punti $x \in \mathbb{R} : x \leq -r$ oppure $x \geq r$, ovvero tutti i punti che distano da zero r o più di r.



Intervalli

Def. Siano $a, \; b \in \mathbb{R}: \; a \leq b$. Chiamiamo **intervallo chiuso** di estremi a e b l'insieme

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | \; a \leq x \leq b\}.$$

Se $a < b$, chiamiamo **intervallo aperto** di estremi a e b l'insieme

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | \; a < x < b\}.$$

(a, b) si può scrivere anche $]a, b[$.

intervallo semi-aperto a destra: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | \; a \leq x < b\}.$

intervallo semi-aperto a sinistra: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}|\ a < x \leq b\}$.

Intervalli definiti da una sola disuguaglianza:
$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}|\ a \leq x\}$, $\qquad (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}|\ a < x\}$

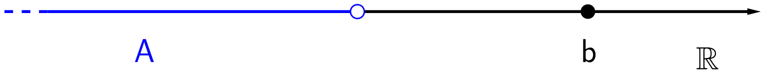
oppure $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}|\ x \leq b\}$,
$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}|\ x < b\}$,
dove i simboli $-\infty$ e $+\infty$ non indicano numeri reali, permettono di estendere l'ordinamento dei reali, attraverso la convenzione che
$\forall x \in \mathbb{R},\ -\infty < x < +\infty$.
Si definisce la Retta estesa $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$

In generale: un intervallo si dice **chiuso** se include i suoi estremi, **aperto** se esclude i suoi estremi.
Def. I punti dell'intervallo che non sono estremi dell'intervallo sono detti **punti interni**.

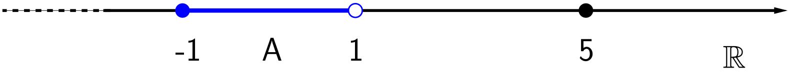
Maggioranti di un insieme

Def. Sia $A \subset \mathbb{R}$. Diciamo che un numero $b \in \mathbb{R}$ è **un maggiorante** di A se è maggiore o uguale di ogni elemento di A, cioè:

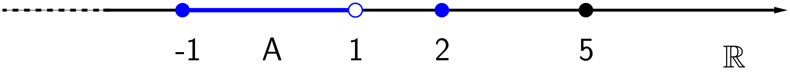
$$b \geq x, \qquad \forall x \in A.$$



Es. $A = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x < 1\}$. $b = 1$, $b = 5$, $b = 1000$ sono maggioranti di A. Qualunque $b \geq 1$ è maggiorante di A.



Es. $A = [-1, 1) \cup \{2\}$. Tutti i $b \geq 2$ sono maggioranti di A, $b = 1.6$ non è maggiorante di A.



Insiemi superiormente limitati

Def. Sia $A \subset \mathbb{R}$. Diciamo che A è **superiormente limitato** se ammette dei maggioranti.

Es. $A = \{x \in \mathbb{R} | x < 1\}$ è superiormente limitato.

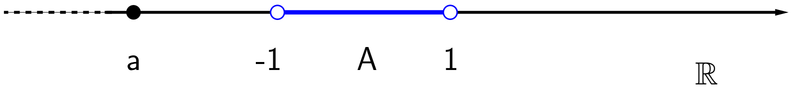
$A = [-1, 1) \cup \{2\}$ è superiormente limitato.

$A = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$ NON è superiormente limitato, non ammette maggioranti.

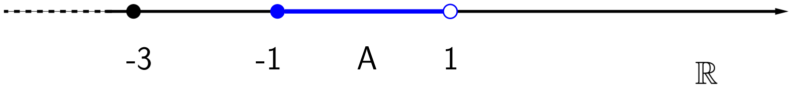
Minoranti di un insieme

Def. Sia $A \subset \mathbb{R}$. Diciamo che un numero $a \in \mathbb{R}$ è **un minorante** di A se è minore o uguale di ogni elemento di A, cioè:

$$a \le x, \qquad \forall x \in A.$$



Es. $A = \{x \in \mathbb{R} | -1 \le x < 1\}$. $a = -1$, $a = -3,5$, $a = -100$ sono minoranti di A. Qualunque $a \le -1$ è minorante di A.



Es. $A = [-1, 1) \cup \{2\}$. Qualunque $a \le -1$ è minorante di A.

Insiemi inferiormente limitati

Def. Sia $A \subset \mathbb{R}$. Diciamo che A è **inferiormente limitato** se ammette minoranti.

Es. $A = [-1, 1) \cup \{2\}$. A è inferiormente limitato.

Es. $A = (-\infty, 1)$. A è superiormente limitato, ma non inferiormente limitato: tutti i numeri reali $x \geq 1$ sono maggioranti di A, mentre non esistono minoranti di A.
Es. $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ è inferiormente limitato, ma non superiormente.
Qualunque $a \leq 0$ è un minorante di $\mathbb{N}$, ma:

non esiste $b \in \mathbb{R}$ maggiorante di $\mathbb{N}$. Proprietà di Archimede
(Si enuncia anche così: $\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \; \exists n \in \mathbb{N} : ny > x$)

Insiemi limitati

Def. Si dice che A è **limitato** se è contemporaneamente superiormente e inferiormente limitato.

L'intervallo $[-5, \pi)$ è limitato. I suoi minoranti sono tutti i numeri reali $x \leq -5$, i suoi maggioranti sono tutti i numeri reali $x \geq \pi$

Massimo di un insieme

Def. Chiamiamo **massimo dell'insieme** $A \subset \mathbb{R}$ (e lo denotiamo $\max A$) un maggiorante x_M dell'insieme A che appartiene all'insieme stesso. Ovvero

$$x_M = \max A \qquad \textit{se} \qquad x_M \geq x \qquad \forall x \in A \qquad \textit{e} \qquad x_M \in A.$$

Es. $A = (-5, 2]$. Ogni $x \geq 2$ è maggiorante di A, $x_M = 2$ è maggiorante di A e appartiene ad A, quindi $\max A = 2$.

Minimo di un insieme

Def. Chiamiamo **minimo dell'insieme** $A \subset \mathbb{R}$ (e lo denotiamo $\min A$) un minorante x_m dell'insieme A che appartiene all'insieme stesso. Ovvero

$$x_m = \min A \qquad \textit{se} \qquad x_m \leq x \qquad \forall x \in A \qquad e \qquad x_m \in A.$$

Es. $A = [-5, 2)$. Ogni $x \leq -5$ è minorante di A, $x_m = -5$ è minorante di A e appartiene ad A, quindi $\min A = x_m = -5$.
Ogni $x \geq 2$ è maggiorante di A, $x = 2$ è maggiorante di A, ma NON appartiene ad A, quindi $\nexists \max A$.

Teorema. Massimo e minimo di un insieme, se esistono, sono unici.

Estremo superiore di un insieme

Def. Sia $A \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato. Chiamiamo **estremo superiore** di A il più piccolo dei maggioranti di A e lo denotiamo con $\sup A$.

Proprietà. Se $\exists \max A$ allora $\exists \sup A$ e $\sup A = \max A$. Tuttavia può esistere $\sup A$ senza che esista $\max A$.

Es. $A = (0, 2)$. $x = 2$ è $\sup A$ ma non è $\max A$.
$A = (0, 2]$. $x = 2$ è $\max A$ e anche $\sup A$.

Se un insieme non è superiormente limitato, diciamo che

$$\sup A = +\infty$$

Estremo inferiore di un insieme

Sia $A \subset \mathbb{R}$ inferiormente limitato. Chiamiamo **estremo inferiore** di A il più grande dei minoranti di A e lo denotiamo con $\inf A$.

Proprietà. Se $\exists \min A$ allora $\exists \inf A$ e $\inf A = \min A$. Tuttavia può esistere $\inf A$ senza che esista $\min A$.
Es. $A = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, $\inf A = -\sqrt{2}$, ma $\nexists \min A$.

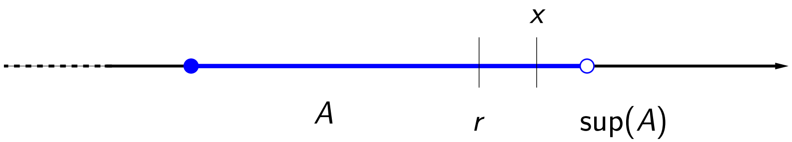
Se un insieme non è inferiormente limitato, diciamo che

$$\inf A = -\infty$$

Caratterizzazione matematica del sup

Il $\sup A$ è caratterizzato dalle seguenti due condizioni:
1) $\forall x \in A,\ x \leq \sup A$
(ovvero $\sup A$ è un maggiorante di A)

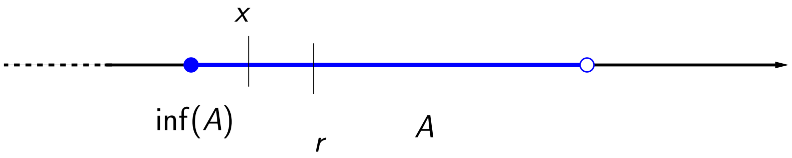
2) $\forall r \in \mathbb{R},\ r < \sup A,\ \exists x \in A |\ x > r.$
(ovvero $\sup A$ è il più piccolo dei maggioranti di A, perché un qualsiasi altro numero reale r minore di $\sup A$ non è più maggiorante di A)



Caratterizzazione matematica dell'inf

L'inf A è caratterizzato dalle seguenti due condizioni:
1) $\forall x \in A, \; x \geq \inf A$
(ovvero inf A è un minorante di A)

2) $\forall r \in \mathbb{R}, \; r > \inf A, \; \exists x \in A | \; x < r$.
(ovvero inf A è il più grande dei minoranti di A, perché un qualsiasi altro numero reale r maggiore di inf A non è più minorante di A)



Proprietà. Se esistono inf e sup di un insieme, questi sono unici.

Es. $A = \{x \in \mathbb{Q} |\ x^2 - 2 < 0\}$. A è limitato in $\mathbb{R}$, ammette inf e sup, ma non ha massimo e minimo.
Infatti si può anche scrivere $A = \{x \in \mathbb{Q} |\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$.
I maggioranti di A sono tutti i numeri reali $x \geq \sqrt{2}$. I minoranti di A sono tutti i numeri reali $x \leq -\sqrt{2}$, ma $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ e quindi $\pm\sqrt{2} \notin A$.

N.B. La scrittura $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ è equivalente a $\{x \in \mathbb{R} |\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$ e non a $\{x \in \mathbb{Q} |\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$.

Es. $A = \{x \in \mathbb{R} |\ x^2 - 2 \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R} |\ -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$.
A è limitato in $\mathbb{R}$ ed ha massimo e minimo.
Infatti, stavolta $\pm\sqrt{2} \in A$.

Riferimento bibliografico: C. Canuto, A. Tabacco: Analisi Matematica 1, terza edizione. Capitolo 1, pag. 1-19.

Esercizi: Costruire le tavole di verità per i connettivi logici, seguendo le regole date nelle definizioni. Esempio per la congiunzione:

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Esercizi: Canuto-Tabacco. pag. 26, 27 + esercizi vari sugli argomenti dei prerequisiti.

Esercizio: Individuare le proprietà dei seguenti intervalli (aperto, chiuso, semi-aperto a destra o a sinistra, limitato); individuare inf e sup e, qualora esistano, anche min e max.
$(-5,4]$, $(-\infty,0)$, $\{x\in\mathbb{R}:\ |x|<3\}$,
$\{x\in\mathbb{R}:\ |x|\leq\pi\}$, $]2,18[$, $[-2\pi,2\pi)$,
$\{x\in\mathbb{R}:\ x^2\leq 2\}$.

Esercizio: individuare inf, sup, maggioranti e minoranti dei seguenti insiemi e, qualora esistano, anche min e max.
$\{x\in\mathbb{R}:\ |x-2|>4\}$, $\{x\in\mathbb{R}:\ |x|<3\vee|x+1|>8\}$,
$\{x\in\mathbb{R}:\ |x|\leq\pi\wedge|x|>2\}$, $(2,10]$, $[-2\pi,2\pi)\cup\{6\}$,
$\{x\in\mathbb{R}:\ x^2\leq 2\}\cap\{x\in\mathbb{R}:\ x^3>1\}$,

$$\left\{x\in\mathbb{R}:\sqrt[3]{\frac{x^2-3}{3x+5}}\geq 0\right\}.$$