ESERCIZI SUL CALCOLO DI LIMITI CON GLI SVILUPPI DI TAYLOR

a cura di Michele Scaglia

SVILUPPI DI MACLAURIN DELLE PRINCIPALI FUNZIONI

Ricordiamo nella tabella che segue gli sviluppi di Taylor per $x \to 0$ delle principali funzioni elementari (tali sviluppi vengono anche detti *Sviluppi di Maclaurin*).

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+2}) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + o(x^3) \qquad \text{per } x \to 0$$

ESERCIZI SVOLTI

1) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \cos x + 1}{2x + x^2 + 1 - \dfrac{e^x - 1}{x}}.$$

Svolgimento.

Per prima cosa osserviamo che il limite si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$.
Controlliamo se la sostituzione dei vari addendi infinitesimi con gli infinitesimi polinomiali equivalenti porterebbe ad eventuali cancellazioni.
Essendo per $x \to 0$,

$$\sin x \;\sim\; x, \quad (1 - \cos x) \;\sim\; \frac{1}{2}x^2, \quad (e^x - 1) \;\sim\; x,$$

si avrebbe, per $x \to 0$,

$$\frac{\sin x - \cos x + 1}{2x + x^2 + 1 - \frac{e^x-1}{x}} = \frac{\sin x + (1 - \cos x)}{2x + x^2 + 1 - \frac{e^x-1}{x}} \;\sim\; \frac{x + \frac{1}{2}x^2}{2x + x^2 + 1 - \frac{x}{x}} =$$

$$= \frac{x + \frac{1}{2}x^2}{2x + x^2 + 1 - 1},$$

vale a dire una cancellazione a denominatore dei termini di grado inferiore.
Pertanto, sostituiremo opportunamente le funzioni al denominatore con polinomi tramite gli sviluppi di Taylor attorno a $x = 0$.
Prima, però, riscriviamo il denominatore della frazione facendo il minimo comune denominatore. Si ha

$$\frac{\sin x - \cos x + 1}{2x + x^2 + 1 - \dfrac{e^x - 1}{x}} = \frac{\sin x - \cos x + 1}{\dfrac{2x^2 + x^3 + x - e^x + 1}{x}} = \frac{x \cdot (\sin x - \cos x + 1)}{2x^2 + x^3 + x - e^x + 1}.$$

Poiché, dagli infinitesimi equivalenti ricavati dai limiti fondamentali, sappiamo che

$$\sin x \;\sim\; x, \quad (1 - \cos x) \;\sim\; \frac{1}{2}x^2 \quad \text{per } x \to 0,$$

per il numeratore si ha, senza ottenere cancellazioni,

$$x \cdot (\sin x - \cos x + 1) \;=\; x \cdot [\sin x + (1 - \cos x)] \;\sim x \cdot \left(x + \frac{1}{2}x^2 \right) = x(x + o(x)) = x^2 + o(x^2).$$

Alternativamente, possiamo pure scrivere

$$x \cdot (\sin x - \cos x + 1) \ \sim \ x^2 \quad \text{per } x \to 0.$$

Abbiamo trascurato il termine $\frac{1}{2}x^2$ in quanto, quando un fattore tende a 0, ai fini della risoluzione della forma indeterminata, occorre individuare l'addendo di grado più basso.

A questo punto sviluppiamo l'unica funzione non polinomiale che compare a denominatore, vale a dire e^x.
Si ha, arrestandoci, ad esempio, al 4 ordine, che per $x \to 0$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

Il denominatore, dunque, per $x \to 0$, si può approssimare come segue:

$$2x^2 + x^3 + x - e^x + 1 = 2x^2 + x^3 + x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) + 1 =$$

$$= 2x^2 + x^3 - 1 + x - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} + 1 + o(x^4) = \frac{3}{2}x^2 + o(x^2),$$

cioè

$$2x^2 + x^3 + x - e^x \quad \sim \quad \frac{3}{2}x^2 \quad \text{per } x \to 0.$$

Osserviamo che il grado più basso (quello che interessa quando si deve risolvere la forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$) che resta nel denominatore è 2 (non vi sono state infatti cancellazioni tra gli addendi dei vari polinomi).
Pertanto possiamo tornare al limite originario e scrivere

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \cos x + 1}{2x + x^2 + 1 - \dfrac{e^x - 1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot (\sin x - \cos x + 1)}{2x^2 + x^3 + x - e^x + 1} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\frac{3}{2}x^2} = \frac{2}{3}.$$

2) **[T. E. 27/03/2013]**

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} + \log\left(\dfrac{1+x}{e}\right)}{2\,(\cosh x - 1)\sinh x}.$$

Svolgimento.

Osserviamo che il limite si presenta nella forma indeterminata $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Per prima cosa, applicando la nota proprietà dei logaritmi, riscriviamo il numeratore come

$$e^{-x} + \log\left(\frac{1+x}{e}\right) = e^{-x} + \log(1+x) - \log e = e^{-x} + \log(1+x) - 1.$$

Il limite da studiare è quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} + \log(1+x) - 1}{2\,(\cosh x - 1)\sinh x}.$$

Risulta evidente che il primo fattore a denominatore non possa essere trattato con gli infinitesimi polinomiali equivalenti dedotti dai limiti notevoli (si arriverebbe infatti a una cancellazione). Sviluppiamo quindi la funzione esponenziale che, osserviamo, è una funzione composta (in quanto l'argomento dell'esponenziale non è la variabile indipendente x, bensì $-x$).
Poiché risulta

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + o(t^4) \quad \text{per } t \to 0,$$

si ha, essendo nel nostro caso $t = -x \to 0$ per $x \to 0$,

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

Per quanto riguarda il log, invece, non abbiamo a che fare con una funzione composta. Risulta immediatamente

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \quad \text{per } x \to 0.$$

Pertanto, per $x \to 0$, il numeratore è scrivibile come segue:

$$e^{-x} + \log(1+x) - 1 = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - 1$$

$$= \left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)x^3+o(x^3)=\frac{1}{6}x^3+o(x^6)$$

Possiamo scrivere l'approssimazione anche nel seguente modo

$$e^{-x}+\log(1+x)-1 \quad \sim \quad \frac{1}{6}x^3 \ \text{ per } x\to 0.$$

Occupiamoci ora del denominatore.
Compaiono due fattori. Le funzioni coinvolte non sono delle funzioni composte.
Si ha

$$\cosh x = 1+\frac{x^2}{2}+o(x^3), \qquad \sinh x = x+o(x^2) \ \text{ per } x\to 0.$$

Abbiamo sviluppato fino al secondo e al primo ordine rispettivamente in quanto non ci sono altri addendi, nei singoli fattori, che possano portare a cancellazioni.
Il denominatore diviene quindi

$$2\cdot\left(1+\frac{1}{2}x^2-1+o(x^3)\right)(x+o(x^2))=x^3+o(x^5),$$

cioè

$$2\,(\cosh x-1)\sinh x \quad \sim \quad x^3 \ \text{ per } x\to 0.$$

In definitiva il limite iniziale diviene

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

3) **[T. E. 09/01/2007]**

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{4\left[\cos(2x)+\sin^2\left(\frac{2}{\sqrt{2}}x\right)-1\right]}{x\,(e^{2x}-\cosh(2x)-2x)}.$$

Svolgimento.

Osserviamo che il limite si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Vista la struttura complicata dei vari fattori, procediamo immediatamente con gli sviluppi di ciascuna funzione.
Osserviamo che, anche in questo caso, abbiamo a che fare con funzioni composte.
Sviluppiamo il termine $\cos(2x)$.
Poiché si ha, per $t \to 0$,

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4),$$

nel nostro caso, essendo $t = 2x \to 0$ quando $x \to 0$, risulta

$$\cos\underbrace{(2x)}_{t} = 1 - \frac{1}{2}\underbrace{(2x)^2}_{t^2} + \frac{1}{24}\underbrace{(2x)^4}_{t^4} + o\underbrace{(2x)^4}_{t^4} = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4),$$

cioè

$$\cos(2x) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4).$$

Per quanto riguarda il secondo termine, ricordiamo che, per $t \to 0$, si ha

$$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 + o(t^6).$$

Nel nostro caso si ha $t = \dfrac{2}{\sqrt{2}}x \to 0$ quando $x \to 0$.
Pertanto risulta

$$\sin\underbrace{\left(\frac{2}{\sqrt{2}}x\right)}_{t} = \underbrace{\frac{2}{\sqrt{2}}x}_{t} - \frac{1}{6}\underbrace{\left(\frac{2}{\sqrt{2}}x\right)^3}_{t^3} + \frac{1}{5!}\underbrace{\left(\frac{2}{\sqrt{2}}x\right)^5}_{t^5} + o(x^6) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{6}\cdot 2\sqrt{2}\cdot x^3 + o(x^3) = \frac{2}{\sqrt{2}}x - \frac{\sqrt{2}}{3}x^3 + o(x^3).$$

Nella parte finale dello sviluppo abbiamo deciso di arrestarci al terzo ordine, sperando che, nel seguito, non si verifichino cancellazioni che portino alla necessità di sviluppare fino ad un ordine superiore.
Per di più, a noi interessa calcolare lo sviluppo di

$$\sin^2\left(\frac{2}{\sqrt{2}}x\right).$$

Pertanto si ha

$$\sin^2\left(\frac{2}{\sqrt{2}}x\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}x - \frac{\sqrt{2}}{3}x^3 + o(x^3)\right)^2 = 2x^2 + \frac{2}{9}x^6 - \frac{4}{3}x^4 + o(x^6).$$

Proviamo a riscrivere il primo fattore e controlliamo quale sia il grado più basso che resta:

$$\left[\cos(2x) + \sin^2\left(\frac{2}{\sqrt{2}}x\right) - 1\right] = \left[1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \left(2x^2 + \frac{2}{9}x^6 - \frac{4}{3}x^4\right) + o(x^6) - 1\right]$$

Si nota che i termini di grado 2 si cancellano.
Il termine di grado appena superiore che rimane è quello di grado 4: non vi sono, infatti, negli sviluppi delle funzioni, termini di grado 3 (si provi a controllare che è effettivamente così).

Scriviamo quindi:

$$\left[\cos(2x) + \sin^2\left(\frac{2}{\sqrt{2}}x\right) - 1\right] = \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3}\right)x^4 + o(x^4) = -\frac{2}{3}x^4 + o(x^4).$$

Quindi

$$4 \cdot \left[\cos(2x) + \sin^2\left(\frac{2}{\sqrt{2}}x\right) - 1\right] = 4 \cdot \left[-\frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right] = -\frac{8}{3}x^4 + o(x^4),$$

ovvero

$$4 \cdot \left[\cos(2x) + \sin^2\left(\frac{2}{\sqrt{2}}x\right) - 1\right] \quad \sim \quad -\frac{8}{3}x^4 \quad \text{per } x \to 0.$$

Passiamo al denominatore.
Il primo fattore, x, è già in forma polinomiale.
Sviluppiamo quindi il fattore in parentesi tonda, i cui addendi sono delle funzioni composte.
Poiché

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4),$$

si ha, nel nostro caso in cui $t = 2x \to 0$,

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6} + \frac{(2x)^4}{24} + o(2x)^4 = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4).$$

Ci siamo arrestati al quart'ordine: nel caso, se dovesse risultare necessario a causa delle cancellazioni dei termini fino al grado 4, procederemo con lo sviluppo al quint'ordine.
Passiamo al secondo addendo.
Si ha, per $t \to 0$,

$$\cosh t = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + o(t^5).$$

Quindi, detto $t = 2x$, si ha

$$\cosh(2x) = 1 + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} + o(2x)^4 = 1 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4).$$

L'ultimo addendo è già in forma polinomiale.
Pertanto, per $x \to 0$, possiamo scrivere

$$e^{2x} - \cosh(2x) - 2x = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 - \left(1 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^4\right) - 2x + o(x^4) =$$

$$= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 - 1 - 2x^2 - \frac{2}{3}x^4 - 2x + o(x^4).$$

Il termine noto, il termine di grado 1 e il termine di grado 2 si cancellano.
Il grado più basso che resta è il terzo.
Pertanto, trascurando gli addendi di grado più alto, abbiamo che

$$e^{2x} - \cosh(2x) - 2x = \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

o, alternativamente,

$$e^{2x} - \cosh(2x) - 2x \quad \sim \quad \frac{4}{3}x^3 \quad \text{per } x \to 0.$$

Il limite diviene quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{4\left[\cos(2x) + \sin^2\left(\frac{2}{\sqrt{2}}x\right) - 1\right]}{x\left(e^{2x} - \cosh(2x) - 2x\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{8}{3}x^4}{x \cdot \left(\frac{4}{3}x^3\right)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{8}{3}x^4}{\frac{4}{3}x^4} = -\frac{8}{3} \cdot \frac{3}{4} = -2.$$

4) Si calcoli il valore del limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sinh x)^2 - (\sin x)^2}{e^{x^4} - 1}.$$

Svolgimento.

A differenza del numeratore, il denominatore può essere trattato facilmente con un infinitesimo equivalente dedotto dai limiti fondamentali senza creare una cancellazione.

Infatti, dal limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1,$$

segue che

$$(e^t - 1) \quad \sim \quad t \quad \text{per } t \to 0.$$

Pertanto,

$$\left(e^{x^4} - 1\right) \quad \sim \quad x^4 \quad \text{per } x \to 0.$$

Il denominatore lo sostituiremo quindi col termine polinomiale x^4.

Per quanto riguarda il numeratore, invece, troviamo la sottrazione di due addendi entrambi infinitesimi.
Procediamo quindi a sviluppare ciascun termine, provvedendo ad elevare al quadrato ciascuno dei due sviluppi.
Poiché

$$\sinh x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^6) \quad \text{e} \quad \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^6),$$

si avrebbe

$$(\sinh x)^2 = \left(x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^6)\right)^2 \quad \text{e} \quad (\sin x)^2 = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^6)\right)^2.$$

È ben chiaro che non stiamo a calcolare l'intero sviluppo dei quadrati di tali polinomi: non dimentichiamoci del fatto che, nel calcolo di limiti nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$, interessa considerare solamente l'*addendo di grado più basso.*
Osservando ciascuno dei due termini e ricordandosi che andranno poi sottratti, ci accorgiamo che il quadrato del primo addendo in ciascuna potenza sarà destinato a cancellarsi.
Prima di considerare il quadrato del secondo addendo in ciascuna tonda (quadrato che risulterà una potenza di grado piuttosto alto, cioè 6), consideriamo il doppio prodotto tra il primo e il secondo termine di ciascuna delle due tonde: si tratta di due quantità dello stesso valore ma di segno opposto che, a causa del segno $-$, si sommeranno. Il loro grado è ovviamente 4.
Controlliamo che non ci siano altri termini di grado 4 nello sviluppo.
Effettivamente non ce ne sono in quanto, qualsiasi altro quadrato o doppio prodotto avrebbe grado maggiore di 4, come è facile convincersi provando a calcolare alcuni di tali termini.

Fatte queste premesse, scriviamo quanto segue:

$$(\sinh x)^2 - (\sin x)^2 = \left(x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^6)\right)^2 - \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^6)\right)^2 =$$

$$= x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) - \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)\right) = x^2 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) = \frac{2}{3}x^4 + o(x^4).$$

Pertanto

$$(\sinh x)^2 - (\sin x)^2 \quad \sim \quad \frac{2}{3}x^4 \quad \text{per } x \to 0.$$

Il limite diviene quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sinh x)^2 - (\sin x)^2}{e^{x^4} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3}x^4}{x^4} = \frac{2}{3}.$$

5) Si calcoli il valore del limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x) + \log(e^x - x) - \frac{1}{6}x^3}{x^3 \arcsin x}.$$

Svolgimento.

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.
Anche in questo caso, il denominatore è trattabile con gli infinitesimi equivalenti, in quanto consta del prodotto di due fattori infinitesimi.
A causa del limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1,$$

si ha che

$$\arcsin x \quad \sim \quad x \quad \text{per} \quad x \to 0.$$

Quindi sostituiremo il denominatore della frazione col polinomio

$$x^3 \cdot x = x^4.$$

Passiamo quindi al numeratore, dove troviamo la somma di addendi entrambi infinitesimi (infatti, ciascuno dei primi due addendi tende a $\log 1 = 0$).
I primi due termini (non polinomiali) del numeratore sono due funzioni composte.
Come sempre, cominciamo a sviluppare partendo dalle funzioni più interne.

Ricordiamo che, per $x \to 0$, si ha

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4).$$

Inoltre, per $t \to 0$, si ha pure

$$\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + o(t^4).$$

Nel nostro caso l'argomento del log è $\cos x$, che, per lo sviluppo precedente, è

$$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4),$$

vale a dire

$$1 + \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right).$$

Pertanto, per $x \to 0$, si ha che

$$\log(\cos x) = \log\left[1 + \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)\right],$$

vale a dire un termine del tipo

$$\log(1+t),$$

essendo

$$t = \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right).$$

Scriviamo quindi lo sviluppo

$$\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + o(t^4)$$

sostituendo t con $\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)$.
Si ha, per $x \to 0$,

$$\log(\cos x) = \log\left[1 + \underbrace{\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)}_{t}\right] =$$

$$= \underbrace{\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)}_{t} - \frac{1}{2}\underbrace{\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)^2}_{t^2} +$$

$$+\frac{1}{3}\underbrace{\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)^3}_{t^3}-\frac{1}{4}\underbrace{\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)^4}_{t^4}+o\underbrace{\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)^4}_{t^4}.$$

Aspettiamo a sviluppare tutti i calcoli precedenti. Sviluppiamo anche il secondo termine dopodiché, ricordandoci che i due termini andranno sottratti l'uno all'altro, cercheremo di capire quale sia il grado più basso destinato a restare.

Ricordando che, per $x \to 0$, si ha

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4),$$

risulta, per $x \to 0$,

$$e^x - x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) - x = 1 + \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right).$$

Pertanto, il termine

$$\log(e^x - x)$$

risulta approssimato, per $x \to 0$, da

$$\log\left[1 + \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)\right].$$

Sostituendo, stavolta, nello sviluppo

$$\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + o(t^4)$$

il valore $t = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)$, otteniamo

$$\log(e^x - x) = \log\left[1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)}_{t}\right] =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)}_{t} - \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)^2}_{t^2} +$$

$$+\frac{1}{3}\underbrace{\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)^3}_{t^3}-\frac{1}{4}\underbrace{\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)^4}_{t^4}+o\underbrace{\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)^4}_{t^4}.$$

A questo punto, riscriviamo vicini gli sviluppi dei due addendi a numeratore:

$$\log(\cos x)=\log\left[1+\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)\right]=$$

$$=\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)^2+$$

$$+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)^3-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)^4+o\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)^4;$$

$$\log(e^x-x)=\log\left[1+\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)^2+$$

$$+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)^3-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)^4+o\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)^4.$$

Ci accorgiamo che il primo termine di ciascuno sviluppo, quello di grado 2, è destinato a cancellarsi.
Il grado immediatamente più alto sembra essere il 3. Tuttavia, l'unico addendo di grado 3 che compare nello sviluppo, $\frac{1}{6}x^3$ è destinato a cancellarsi con l'ultimo addendo del fattore a numeratore.
Passiamo quindi al grado 4.
Come abbiamo detto a lezione, dobbiamo controllare di far comparire tutti i termini di grado 4 nei due sviluppi, senza tralasciarne alcuno (diversamente, il risultato del limite è errato).
Per quanto riguarda il primo dei due sviluppi, si individuano due termini di grado 4: $\frac{1}{24}x^4$ e il quadrato del primo termine della seconda parentesi tonda.

Cioè, dallo sviluppo di $\log(\cos x)$, si ricava

$$\frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2\right)^2 = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{8}x^4 = \frac{-1}{12}x^4.$$

Altri termini di grado 4 non ce ne sono.
Passiamo allo sviluppo di $\log(e^x - x)$.

Anche in questo caso si hanno solamente due termini di grado 4, nella stessa posizione dei precedenti. In particolare si ricava

$$\frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{8}x^4 = -\frac{1}{12}x^4.$$

Fortunatamente, tra il termine $\log(\cos x)$ e il termine $\log(e^x - x)$ c'è il segno $+$, pertanto tali addendi di grado 4 non sono destinati a cancellarsi.
In definitiva, lo sviluppo del numeratore per $x \to 0$, è

$$\log(\cos x) - \log(e^x - x) - \frac{1}{6}x^3 = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) =$$

$$= -\frac{2}{12}x^4 + o(x^4) = -\frac{1}{6}x^4 + o(x^4);$$

in altre parole

$$\log(\cos x) - \log(e^x - x) - \frac{1}{6}x^3 \quad \sim \quad -\frac{1}{6}x^4 \quad \text{per } x \to 0.$$

Pertanto il limite diviene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x) + \log(e^x - x) - \frac{1}{6}x^3}{x^3 \arcsin x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^4}{x^4} = -\frac{1}{6}.$$

6) Si calcoli il valore del limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{(6\cosh\sqrt{x} - 6\cos\sqrt{x})\tan(x^3)}{15\sin^2 x - 15(\arcsin x)^2}.$$

Svolgimento.

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$.
Notiamo, però, che il secondo fattore a numeratore consta di un solo termine infinitesimo. Lo

possiamo trattare coi limiti notevoli, cioè con la teoria degli infinitesimi equivalenti.
A causa del limite notevole

$$\lim_{t\to 0}\frac{\tan t}{t}=1,$$

si ha

$$\tan t \quad \sim \quad t \;\text{ per }\; t\to 0.$$

Quindi

$$\tan(x^3) \quad \sim \quad x^3 \;\text{ per }\; x\to 0.$$

Sostituiremo quindi il fattore infinitesimo $\tan(x^3)$ col monomio x^3.
Gli altri due fattori, invece, tendono a 0 ma sono somme algebriche di addendi infinitesimi (o riconducibili a tali).
Pertanto procederemo con gli sviluppi di Taylor.
Si tratta di funzioni composte.
Ricordiamo che

$$\cosh t = 1+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{24}t^4+o(t^5), \quad \cos t = 1-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{24}t^4+o(t^4).$$

Nel nostro caso è $t=\sqrt{x}$. Quindi si ha

$$\cosh\sqrt{x}=1+\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2+\frac{1}{24}(\sqrt{x})^4+o((\sqrt{x})^5)=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{24}x^2+o(x^{5/2}),$$

$$\cos\sqrt{x}=1-\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2+\frac{1}{24}(\sqrt{x})^4+o((\sqrt{x})^5)=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{24}x^2+o(x^{5/2}).$$

Poiché il primo fattore è scrivibile come

$$6\cdot\left(\cosh\sqrt{x}-\cos\sqrt{x}\right),$$

si ha, per $x\to 0$,

$$6\cdot\left(\cosh\sqrt{x}-\cos\sqrt{x}\right)=6\cdot\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{24}x^2-\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{24}x^2\right)+o(x^{5/2})\right)=$$

$$=6\cdot\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x+o(x)\right)=6x+o(x).$$

in quanto i termini di grado 1 non si cancellano.

Possiamo anche scrivere

$$\left(6\cosh\sqrt{x} - 6\cos\sqrt{x}\right) \quad \sim \quad 6x \quad \text{per } x \to 0.$$

Consideriamo ora il fattore a denominatore, vale a dire

$$15\sin^2 x - 15(\arcsin x)^2 = 15(\sin^2 x - (\arcsin x)^2).$$

Si ha

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \quad \arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Pertanto

$$\sin^2 x - (\arcsin x)^2 = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^2 - \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2.$$

Il quadrato del primo addendo di ciascuna tonda è destinato a cancellarsi.
Controlliamo quindi i termini di grado appena superiore, vale a dire i doppi prodotti (aventi grado 4).
Si ha

$$-\frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^4 = -\frac{2}{3}x^4.$$

Non essendoci cancellazione, possiamo arrestare lo sviluppo al grado 3.
Quindi risulta, per $x \to 0$,

$$\sin^2 x - (\arcsin x)^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) = -\frac{2}{3}x^4 + o(x^4),$$

da cui

$$15(\sin^2 x - (\arcsin x)^2) = 15 \cdot \left(-\frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right) = -10x^4 + o(x^4),$$

ovvero

$$15(\sin^2 x - (\arcsin x)^2) \quad \sim \quad -10x^4 \quad \text{per } x \to 0.$$

Pertanto il limite risulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{(6\cosh\sqrt{x} - 6\cos\sqrt{x})\tan(x^3)}{15\sin^2 x - 15(\arcsin x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{6x(x^3)}{-10x^4} = -\frac{3}{5}.$$

OSSERVAZIONE.

Per quanto riguarda il denominatore, avremmo potuto agire diversamente ed evitare dei calcoli. Ricordando che $(a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$, si trova

$$15 \sin^2 x - 15(\arcsin x)^2 = 15 \left[(\sin x)^2 - (\arcsin x)^2\right] =$$

$$= 15 \cdot (\sin x + \arcsin x)(\sin x - \arcsin x).$$

Poiché, per $x \to 0$,

$$\sin x \ \sim \ x \quad \text{e} \quad \arcsin x \ \sim \ x,$$

si trova, senza ricorrere agli sviluppi di Taylor di grado superiore al primo,

$$(\sin x + \arcsin x) \ \sim \ x + x = 2x,$$

ovvero

$$(\sin x + \arcsin x) \ = \ 2x + o(x).$$

Resta da sviluppare solo il secondo fattore, cioè

$$(\sin x - \arcsin x).$$

Poiché

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \quad \text{e} \quad \arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 \quad \text{per } x \to 0,$$

si ha

$$(\sin x - \arcsin x) = \left[x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) - \left(x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)\right] =$$

$$= \left(-\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^3 +\right) + o(x^4) = -\frac{1}{3}x^3 + o(x^4),$$

ovvero
$$(\sin x - \arcsin x) \;\sim\; -\frac{1}{3}x^4 \quad \text{per } x \to 0.$$

In definitiva, per il denominatore si ha

$$15\sin^2 x - 15(\arcsin x)^2 = 15(2x + o(x))\left(-\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)\right) = -10x^4 + o(x^5),$$

che è lo stesso risultato trovato in precedenza.

7) Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(\sin x) - x\cos x}{x^{6-|\alpha|}\arctan(\cos x)}.$$

Svolgimento.

Il denominatore consta di due fattori, il primo dei quali, $x^{6-|\alpha|}$, si presenta già in forma polinomiale, quindi adatta alla discussione finale.
Per quanto riguarda il secondo fattore, invece, constatiamo immediatamente che si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \arctan(\cos x) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Pertanto, il denominatore della frazione lo sostituiamo col fattore

$$\frac{\pi}{4}x^{6-|\alpha|}.$$

Consideriamo quindi il numeratore.
Si ha la sottrazione di due funzioni composte entrambe infinitesime per le quali, come si può intuire guardandone la forma, l'applicazione dei limiti notevoli non porta ad alcun risultato.
Procediamo quindi con gli sviluppi di Taylor, partendo dalle funzioni più interne.
Anzitutto ricordiamo che, per $x \to 0^+$, si ha

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^6).$$

Poiché, per $t \to 0$, risulta

$$\arctan t = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + o(t^6)$$

si ha, essendo nel nostro caso $t = \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^6)$,

$$\arctan\underbrace{(\sin x)}_{t} = \arctan\underbrace{\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^6)\right)}_{t} =$$

$$= \underbrace{x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^6)}_{t} - \frac{1}{3}\underbrace{\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^6)\right)^3}_{t^3} +$$

$$+\frac{1}{5}\underbrace{\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^6)\right)^5}_{t^5} + o\underbrace{\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^6)\right)^6}_{t^6}$$

Aspettiamo a svolgere i calcoli e sviluppiamo il secondo termine, $x\cos x$.
Poiché, per $x \to 0^+$, si ha

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5),$$

risulta, per $x \to 0^+$,

$$x\cos x = x \cdot \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right) = x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + o(x^6).$$

Poiché i due termini $\arctan(\sin x)$ e $x\cos x$ vanno sottratti l'uno all'altro, cerchiamo di capire quali calcoli sia necessario compiere per individuare il termine di grado più basso che resta.
I termini di grado 1 si cancellano.
Il grado appena più alto è il 3: dobbiamo quindi cercare negli sviluppi tutti i termini aventi grado 3 e controllare se si giunga o meno a una loro cancellazione.
Per quanto rigurada il primo sviluppo, quello di $\arctan(\sin x)$, ci interessa il termine di grado 3 nel primo blocco, vale a dire $-\frac{1}{6}x^3$, e il cubo del primo addendo della seconda tonda, opportunamente moltiplicato per il coefficiente $-\frac{1}{3}$ dello sviluppo:

$$-\frac{1}{3} \cdot (x)^3 = -\frac{1}{3}x^3.$$

Altri non ce ne sono, in quanto si otterrebbero, sviluppando i conti, potenze di grado più alto.
Considerando il termine $x\cos x$, abbiamo solamente l'addendo

$$-\frac{1}{2}x^3.$$

La somma algebrica di questi tre termini di grado 3 porta a

$$-\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{3}x^3 - \left(-\frac{1}{2}x^3\right) = \frac{0}{3}x^3 = 0,$$

cioè una cancellazione.
Dobbiamo quindi passare al grado appena successivo, cioè 5.
Bisogna prestare particolare attenzione in quanto, nello sviluppo di $\arctan(\sin x)$ compaiono tre addendi di grado 5: a parte i termini $\frac{1}{5!}x^5$ e $+\frac{1}{5}(x)^5$ (ottenuto elevando alla quinta il primo termine della terza tonda), facilmente individuabili, vi è pure, nel cubo della seconda tonda, il triplo prodotto tra il quadrato del primo termine e il secondo, cioè

$$3 \cdot x^2 \cdot \left(-\frac{1}{6}x^3\right) = -\frac{1}{2}x^5,$$

che, moltiplicato per il coefficiente $-\frac{1}{3}$, diviene

$$-\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}x^5\right) = +\frac{1}{6}x^5.$$

Nello sviluppo di $x\cos x$, invece, vi è solo il termine

$$+\frac{1}{24}x^5.$$

Proviamo a sommare tali termini di grado 5, controllando se vi sia o meno cancellazione.
Risulta

$$\frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{6}x^5 - \frac{1}{24}x^5 = \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{6}x^5 - \frac{1}{24}x^5 = \frac{40}{120}x^5 = \frac{1}{3}x^5.$$

Fortunatamente non c'è cancellazione.
Il grado più basso che resta a numeratore è dunque x^5, in particolare, per $x \to 0^+$, possiamo sostituire il numeratore col termine polinomiale

$$\frac{1}{3}x^5.$$

Pertanto dobbiamo discutere il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(\sin x) - x\cos x}{x^{6-|\alpha|}\arctan(\cos x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{3}x^5 + o(x^5)}{\frac{\pi}{4}x^{6-|\alpha|}}.$$

Dobbiamo controllare i gradi del numeratore e del denominatore, non dimenticandoci del fatto che $x \to 0$.
Si hanno le seguenti eventualità:

- se $6-|\alpha|=5$, cioè se $|\alpha|=1$, cioè se $\alpha=\pm 1$, il limite risulta $\ell=\dfrac{4}{3\pi}$ in quanto, ancor prima di passare al limite, si ha una semplificazione dei due termini x^5;
- se $6-|\alpha|<5$, cioè se $|\alpha|>1$, cioè se $\alpha<-1 \quad \cup \quad \alpha>1$, il limite risulta $\ell=0$, poiché lo zero a cui tende il nuemeratore ha grado maggiore dello zero a denominatore;
- se, infine, $6-|\alpha|>5$, cioè $|\alpha|<1$, cioè se $-1<\alpha<1$, il limite risulta $\ell=+\infty$

8) **[T.E. 21/03/2005]**

Si calcoli il valore del limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\log\left(1+2x\right)\right)-e^{2x}+1}{\tan(x^2)}.$$

Svolgimento.

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$.
Il denominatore consta di un solo termine infinitesimo, trattabile coi limiti notevoli.
Si ha immediatamente

$$\tan(x^2) \quad \sim \quad x^2 \quad \text{per} \quad x\to 0.$$

Sostituiremo quindi, nel calcolo del limite, il termine $\tan(x^2)$ con x^2.

Passiamo al numeratore della frazione.
Vi è la somma di più addendi infinitesimi.
Procediamo con gli sviluppi di Taylor.
Ricordiamo che, per $t\to 0$,

$$\log(1+t)=t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3+o(t^4).$$

Nel nostro caso è $t=2x\to 0$, quindi

$$\log(1+2x)=(2x)-\frac{1}{2}(2x)^2+\frac{1}{3}(2x)^3+o(2x)^3=2x-2x^2+\frac{8}{3}x^3+o(x^3).$$

Per quanto riguarda la funzione più esterna si ha, per $t\to 0$,

$$\sin t=t-\frac{1}{6}t^3+o(t^4).$$

Abbiamo, per $x\to 0$,

$$\sin(\underbrace{\log(1+2x)}_{t}) = \sin\underbrace{\left(2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)\right)}_{t} =$$

$$= \underbrace{2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)}_{t} - \frac{1}{6}\underbrace{\left(2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)\right)^3}_{t^3} + o\underbrace{\left(2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)\right)^4}_{t^4}$$

Sviluppiamo il termine e^{2x}.

Poiché, per $t \to 0$,

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4),$$

si ha, nel nostro caso in cui è $t = 2x \to 0$,

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{6}(2x)^3 + \frac{1}{24}(2x)^4 + o(2x)^4 = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4).$$

A questo punto, ricordando che il numeratore è

$$\sin(\log(1+2x)) - e^{2x} + 1,$$

tenendo presente gli sviluppi appena scritti cerchiamo di capire quale sia il grado più basso di x che rimane.

Ovviamente si cancellano i termini noti (cioè 1) e i termini di grado 1 (vale a dire $2x$). Invece non c'è cancellazione degli unici due addendi di grado 2. Risulta infatti

$$-2x^2 - (+2x^2) = -4x^2.$$

Pertanto il numeratore ha come termine di grado inferiore $-2x^2$.

Il limite diviene quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\log(1+2x)) - e^{2x} + 1}{\tan(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-4x^2 + o(x^2)}{x^2} = -4.$$

9) Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{x - x^2 \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}}.$$

Svolgimento.

Osserviamo che la variabile indipendente tende a $+\infty$.
Il numeratore tende a

$$\frac{\pi}{2} - \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Per quanto riguarda il denominatore, invece, si ha che

$$x - x^2 \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2} \to +\infty - \infty \cdot \log(1+0) - \frac{1}{2} = +\infty - \infty \cdot 0 - \frac{1}{2},$$

vale a dire una forma indeterminata.
Conviene operare un cambiamento di variabile. Poniamo

$$t = \frac{1}{x}, \quad \text{cioè} \quad x = \frac{1}{t}.$$

È evidente che, poiché $x \to +\infty$, si ha che

$$t \to 0^+.$$

Riscriviamo, in forza del teorema di sostituzione, il limite nella nuova variabile t. Risulta

$$\lim_{t\to 0} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{t}}{\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\log(1+t) - \frac{1}{2}} = \lim_{t\to 0} \frac{2t^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{t}\right)}{2t - 2\log(1+t) - t^2}.$$

Per quanto riguarda il numeratore conviene fare riferimento alla nota identità

$$\arctan y + \arctan\frac{1}{y} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{se } y < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & \text{se } y > 0 \end{cases}.$$

Poiché $t \to 0^+$, si ha che $t > 0$, quindi

$$\arctan t + \arctan \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2},$$

da cui

$$\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{t} = \arctan t.$$

Pertanto possiamo riscrivere il limite come

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{2t^2 \arctan t}{2t - 2\log(1+t) - t^2}.$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per risolverlo useremo gli sviluppi di Taylor al denominatore e gli infinitesimi equivalenti (riconducibili ai limiti notevoli) al denominatore. Si ha

$$\lim_{t \to 0} \frac{\arctan t}{t} = 1,$$

quindi, per $t \to 0$,

$$\arctan t \quad \sim \quad t.$$

Il numeratore della frazione lo sostituiremo quindi con

$$2t^2 \cdot t = 2t^3.$$

Passiamo quindi al denominatore.
Dobbiamo sviluppare solamente il termine $\log(1+t)$.
Si ha

$$\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + o(t^4),$$

per cui

$$2\log(1+t) = 2t - t^2 + \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^4 + o(t^4).$$

Il denominatore della frazione diviene quindi

$$2t - 2\log(1+t) - t^2 = 2t - 2t + t^2 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^4 - t^2.$$

Osserviamo che si cancellano i termini di grado 1 e di grado 2.
Il grado appena più grande che resta è il 3.
Pertanto possiamo sostituire il denominatore della frazione originaria col termine polinomiale

$$-\frac{2}{3}t^3 + o(t^3).$$

Il limite originario risulta

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{2t^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{t}\right)}{2t - 2\log(1+t) - t^2} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2t^3}{-\frac{2}{3}t^3 + o(t^3)} = -3.$$

10) **[T.E. 06/04/2009]**

Calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{2/n^3} - 1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}} \left[\log\left(1 + \frac{1}{4n}\right)^n\right].$$

Svolgimento.

Si tratta di un limite di successione.
Possiamo trattare due dei tre fattori utilizzando i limiti notevoli.
In particolare, considerato che

$$\lim_{n\to+\infty} \left(e^{2/n^3} - 1\right) = 0,$$

in forza del limite notevole

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1,$$

si ha che, per $t \to 0$,

$$(e^t - 1) \quad \sim \quad t,$$

quindi, detto $t = \frac{2}{n^3} \to 0$, si ha, per $n \to +\infty$,

$$\left(e^{2/n^3} - 1\right) \quad \sim \quad \frac{2}{n^3}.$$

Per quanto riguarda il fattore

$$\left[\log\left(1+\frac{1}{4n}\right)^n\right],$$

che, a causa delle proprietà dei logaritmi, può essere riscritto come

$$n \cdot \log\left(1+\frac{1}{4n}\right),$$

osserviamo che il fattore n si presenta già in forma polinomiale.
Invece, dal limite notevole

$$\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t} = 1,$$

si ha che, per $t \to 0$,

$$\log(1+t) \quad \sim \quad t,$$

da cui, per $t = \dfrac{1}{4n} \to 0$ per $n \to +\infty$,

$$\log\left(1+\frac{1}{4n}\right) \quad \sim \quad \frac{1}{4n}.$$

Resta da capire il comportamento del fattore

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}.$$

È evidente che tale fattore tenda a 0 quando $n \to +\infty$. Inoltre, tale fattore è dato dalla sottrazione di due addendi entrambi infinitesimi.
Tuttavia, in questo caso, l'algebra degli infinitesimi equivalenti non ci aiuta. Infatti, da

$$\sin t \quad \sim \quad t \quad \text{per } t \to 0,$$

si avrebbe

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \quad \sim \quad \frac{1}{n}.$$

Pertanto si otterrebbe

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \quad \sim \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{n},$$

cioè una cancellazione.
Dobbiamo quindi cambiare strada e utilizzare gli sviluppi di Taylor attorno a 0. Siamo autorizzati a fare ciò in quanto, detto $t = \dfrac{1}{n}$, si ha $t \to 0$.
Non dimentichiamoci, inoltre, che ci interessa individuare l'addendo di grado più basso che tende a 0.
Poiché, per $t \to 0$,

$$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3),$$

segue che, per $n \to +\infty$,

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 + o\left(\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Pertanto si ha, per $n \to +\infty$,

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \frac{1}{n} = -\frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

ovvero

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \quad \sim \quad -\frac{1}{6n^3} \quad \text{per} \quad n \to +\infty.$$

A questo punto possiamo riscrivere il limite sostituendo ciascun fattore col corrispondente infinitesimo polinomiale equivalente.
Risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{2/n^3} - 1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}} \left[\log\left(1 + \frac{1}{4n}\right)^n\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{2/n^3} - 1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}} \cdot n \cdot \log\left(1 + \frac{1}{4n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2}{n^3}}{-\frac{1}{6n^3}} \cdot n \cdot \frac{1}{4n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{n^3}\right) \cdot \left(-6n^3\right) \cdot \frac{1}{4} = -3.$$

11) **[T.E. 9/12/2003]**

Si caclcoli il limite

$$\lim_{x\to0} \frac{2\left[\cosh(x\cos 2x) - \cosh x\right]}{x^4}.$$

Svolgimento.

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, come è facile constatare.
Il numeratore è dato dalla sottrazione di due funzioni tendenti entrambe a 1.
Ricordiamo lo sviluppo del $\cosh t$ e del $\cos t$ per $t \to 0$:

$$\cosh t = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^5), \quad \cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^5).$$

In particolare, poiché $2x \to 0$ si ha pure

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} + o((2x)^5) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4),$$

da cui

$$x \cos 2x = x \cdot \left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right) = x - 2x^3 + \frac{2}{3}x^5 + o(x^5).$$

Poiché $(x \cos 2x)$ è l'argomento del primo cosh, riscriviamo lo sviluppo di $\cosh t$,

$$\cosh t = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^5),$$

sostituendo, al posto di t, $x \cos 2x$, ovvero il suo sviluppo per $x \to 0$.
Si ha

$$\cosh \underbrace{(x \cos 2x)}_{t} = \cosh \underbrace{\left(x - 2x^3 + \frac{2}{3}x^5 + o(x^5)\right)}_{t} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \underbrace{\left(x - 2x^3 + \frac{2}{3}x^5 + o(x^5)\right)^2}_{t^2} + \frac{1}{24} \underbrace{\left(x - 2x^3 + \frac{2}{3}x^5 + o(x^5)\right)^4}_{t^4} + o \underbrace{\left(x - 2x^3 + \frac{2}{3}x^5 + o(x^5)\right)^5}_{t^5}$$

Al precedente sviluppo andrà sottratto il seguente:

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

Osserviamo immediatamente che c'è cancellazione tra i termini noti (cioè 1) e i termini di grado 2 (osserviamo che, nel primo sviluppo, l'unico termine di grado 2 compare calcolando il quadrato del primo termine della prima tonda, elevata alla potenza 2).
Passiamo quindi al grado immediatamente successivo che, come si può constatare, è il 4.
Nel primo sviluppo sono ben due i termini che hanno grado 4: il doppio prodotto tra il primo e il secondo termine nella prima tonda e la potenza quarta del primo addendo della seconda tonda, cioè

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (x) \cdot (-2x^3) + \frac{1}{24}(x)^4 = -2x^4 + \frac{1}{24}x^4.$$

Nel secondo sviluppo, invece, compare solo il termine $\frac{1}{24}x^4$.

Quindi, complessivamente, il termine di grado 4 dello sviluppo complessivo è

$$-2x^4 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{24}x^4 = -2x^4.$$

In definitiva si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\left[\cosh(x\cos 2x) - \cosh x\right]}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2\left[-2x^4 + o(x^4)\right]}{x^4} = -4.$$

12) **[T.E. 31/08/2015]**

Calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cosh\left(\dfrac{n!}{n^{7n}}\right) - \cos\left(\dfrac{n!}{n^{7n}}\right)}{1 + \log\left(1 + \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{7n+1}}\right) - \exp\left(\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{7n+1}}\right)}.$$

Svolgimento.

Analizziamo il numeratore.
Poiché per $n \to +\infty$ risulta

$$y := \left(\frac{n!}{n^{7n}}\right) \to 0,$$

essendo n^{7n} un infinito di ordine superiore rispetto a $n!$. Pertanto avremo che il numeratore è infinitesimo (tende a $(\cosh 0 - \cos 0) = (1-1) = 0.$).
Ricordiamo gli sviluppi di Taylor per $y \to 0$ delle funzioni cosh e cos:

$$\cosh y = 1 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{24}y^4 + o(y^5), \qquad \cos y = 1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{24}y^4 + o(y^5).$$

Risulta quindi, per $y \to 0$,

$$(\cosh y - \cos y) = 1 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{24}y^4 + o(y^5) - \left(1 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{24}y^4 + o(y^5)\right) =$$

$$= y^2 + o(y^3).$$

Il termine di grado più basso che è rimasto è y^2: non è necessario proseguire con lo sviluppo.

Nel nostro caso avremo, posto $y = \left(\frac{n!}{n^{7n}}\right)$,

$$\left[\cosh\left(\frac{n!}{n^{7n}}\right) - \cos\left(\frac{n!}{n^{7n}}\right)\right] = \left(\frac{n!}{n^{7n}}\right)^2 + o\left[\left(\frac{n!}{n^{7n}}\right)^3\right]$$

cioè, per alleggerire la notazione,

$$\left[\cosh\left(\frac{n!}{n^{7n}}\right) - \cos\left(\frac{n!}{n^{7n}}\right)\right] \sim \left(\frac{n!}{n^{7n}}\right)^2 \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Consideriamo il denominatore,

$$\left[1 + \log\left(1 + \frac{(n+1)!}{(n+1)^{7n+1}}\right) - \exp\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{7n+1}}\right)\right],$$

ove

$$\exp\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{7n+1}}\right) = e^{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{7n+1}}}.$$

Posto

$$t := \left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{7n+1}}\right),$$

si ha, a causa della scala degli infiniti, che $t \to 0$ quando $n \to +\infty$.
Il denominatore è quindi della forma

$$1 + \log(1+t) - e^t \quad \text{con} \quad t \to 0.$$

Poiché

$$\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + o(t^4) \quad \text{per } t \to 0$$

e

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4) \quad \text{per } t \to 0,$$

avremo, per $t \to 0$, che

$$1 + \log(1+t) - e^t =$$

$$= 1 + t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + o(t^4) - \left(1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4)\right) =$$

$$= 1 + t - \frac{1}{2}t^2 - 1 - t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2) = -t^2 + o(t^2),$$

ovvero

$$1 + \log(1+t) - e^t \ \sim \ -t^2 + o(t^2).$$

Ci siamo fermati al grado 2 poiché, per $t \to 0$, interessa l'infinitesimo di ordine inferiore. Sostituendo t troviamo

$$1 + \log\left(1 + \frac{(n+1)!}{(n+1)^{7n+1}}\right) - \exp\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{7n+1}}\right) \ \sim \ -\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{7n+1}}\right)^2 \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Riscriviamo il limite originario. Si trova

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cosh\left(\frac{n!}{n^{7n}}\right) - \cos\left(\frac{n!}{n^{7n}}\right)}{1 + \log\left(1 + \frac{(n+1)!}{(n+1)^{7n+1}}\right) - \exp\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{7n+1}}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{n!}{n^{7n}}\right)^2}{-\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{7n+1}}\right)^2} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{n!}{n^{7n}}\right)^2}{-\left(\frac{(n)!\cdot(n+1)}{(n+1)^{7n}\cdot(n+1)}\right)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n!)^2}{n^{14n}}}{-\frac{(n!)^2\cdot(n+1)^2}{(n+1)^{14n}\cdot(n+1)^2}} =$$

$$= \lim_{nto+\infty} -\frac{(n!)^2}{n^{14n}} \cdot \frac{(n+1)^{14n}\cdot(n+1)^2}{(n!)^2\cdot(n+1)^2} = \lim_{n\to+\infty} -\frac{(n+1)^{14n}}{n^{14n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} -\left(\frac{n+1}{n}\right)^{14n} = \lim_{n\to+\infty} -\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{14} = -e^{14}.$$

13) Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt[4]{1+2x} - e^{\frac{1}{2}x} + x^2}{1-\cos(3x)}.$$

Svolgimento.

Si vede facilmente che il limite si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Cosideriamo subito il denominatore, che consta di un solo fattore infinitesimo approssimabile utilizzando i limiti fondamentali.

Poiché
$$1-\cos y \quad \sim \quad \frac{1}{2}y^2 \quad \text{per } y \to 0,$$

avremo, posto $y = 3x \to 0$ per $x \to 0$,
$$1-\cos(3x) \quad \sim \quad \frac{1}{2}(3x)^2 = \frac{9}{2}x^2 \quad \text{per } x \to 0.$$

Studiamo il numeratore,
$$\sqrt[4]{1+2x} - e^{\frac{1}{2}x} + x^2 = (1+2x)^{\frac{1}{4}} - e^{\frac{1}{2}x} + x^2.$$

Ricordiamo lo sviluppo
$$(1+y)^\alpha = 1 + \alpha y + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}y^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}y^3 + o(y^3).$$

In particolare, posto $\alpha = \frac{1}{4}$, si ha
$$(1+y)^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}-1\right)y^2 + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{4}-2\right)y^3 + o(y^3) =$$

$$= 1 + \frac{1}{4}y - \frac{3}{32}y^2 + \frac{7}{128}y^3 + o(y^3).$$

Nel nostro caso, in cui $y = 2x$, avremo
$$(1+2x)^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4}(2x) - \frac{3}{32}(2x)^2 + \frac{7}{128}(2x)^3 + o(x^4) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{7}{8}x^3 + o(x^4)$$

Sviluppiamo il termine $e^{\frac{1}{2}x}$.
Poiché
$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + o(y^3),$$

avremo, posto $y = \frac{1}{2}x$,
$$e^{\frac{1}{2}x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}x\right)^3 + o(x^3) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{48}x^3 + o(x^3)$$

Possiamo sviluppare l'intero numeratore:
$$\sqrt[4]{1+2x} - e^{\frac{1}{2}x} + x^2 = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + o(x^3) - \left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{48}x^3 + o(x^3)\right) + x^2 =$$

$$= -\frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{8}x^2 + x^2 + o(x^2) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2),$$

ovvero

$$\sqrt[4]{1+2x} - e^{\frac{1}{2}x} + x^2 \quad \sim \quad \frac{1}{2}x^2 \quad \text{per } x \to 0.$$

In definitiva si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{1+2x} - e^{\frac{1}{2}x} + x^2}{1-\cos(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{9}{2}x^2} = \frac{1}{9}.$$