ESERCIZI SUGLI STUDI DI FUNZIONE TRATTI DA TEMI D'ESAME

a cura di Michele Scaglia

1) **[T.E. 06/09/2010]**

Sia data la seguente funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + x^2 \log |x|} & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Tracciare un grafico qualitativo della funzione f, in accordo con i risultati ottenuti.

Svolgimento.

Nel testo dell'esame non è richiesto lo studio del dominio di f, in quanto l'equazione

$$1 + x^2 \log |x| \neq 0$$

non è risolvibile elementarmente con strumenti algebrici (infatti, in tale equazione, l'incognita x compare in funzioni di specie diverse).

Determinare eventuali simmetrie.

Controlliamo se f è pari, il che significa controllare se

$$f(-x) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in \text{dom} f.$$

In $x = 0$ f vale 1 per definizione.
Al di fuori di $x = 0$ si ha (ricordando che $|-x| = |(-1) \cdot x| = |-1| \cdot |x| = |x|$)

$$f(-x) = \frac{1}{1 + (-x)^2 \log |-x|} = \frac{1}{1 + x^2 \log |x|} = f(x),$$

il che significa che f è **pari** (il suo grafico è quindi simmetrico rispetto all'asse delle ordinate).

Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per f.

Cominciamo a calcolare i limiti per $x \to 0$.
Si ha

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{1 + x^2 \log |x|} = \left[\frac{1}{1 + 0} \right] = 1,$$

per il ben noto limite notevole

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha (\log x)^\beta = 0, \quad \alpha, \beta > 0,$$

applicato nel nostro caso con

$$\alpha = 2 \quad \text{e} \quad \beta = 1.$$

In maniera del tutto analoga si vede che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1 + x^2 \log|x|} = \left[\frac{1}{1+0}\right] = 1.$$

(non ci meravigliamo di questo fatto, dato che la funzione, come osservato nel punto precedente, è pari).

Calcoliamo il limite per $x \to +\infty$ di f (che sarà uguale, per la simmetria, al limite per $x \to -\infty$). Si ha

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{1 + x^2 \log|x|} = \left[\frac{1}{1 + \infty \cdot \log(+\infty)}\right] = \left[\frac{1}{1 + \infty \cdot (+\infty)}\right] =$$

$$= \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0^+.$$

Ne segue che la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale destro per f (e, per la simmetria, è anche asintoto orizzontale sinistro).
Pertanto la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale completo per f.

Studiare la continuità della funzione nel suo dominio.

Poiché

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 = f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x),$$

si ha che la funzione f è continua in $x = 0$.

Al di fuori di $x = 0$ sicuramente la funzione è continua perché composizione di funzioni continue fuori da $x = 0$.

Calcolare la funzione derivata prima di f e determinarne il dominio, classificando eventuali punti di non derivabilità.
Ricordiamo che

$$(|x|)' = \frac{x}{|x|}.$$

Si ha, per ogni $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{-\left(2x\log|x| + x^2 \cdot \dfrac{1}{|x|} \cdot \dfrac{x}{|x|}\right)}{\left(1 + x^2 \log|x|\right)^2} = \frac{-\left(2x\log|x| + x^2 \cdot \dfrac{x}{|x|^2}\right)}{\left(1 + x^2 \log|x|\right)^2} =$$

$$= \frac{-\left(2x\log|x| + x^2 \cdot \dfrac{x}{x^2}\right)}{\left(1 + x^2 \log|x|\right)^2} = \frac{-\left(2x\log|x| + x\right)}{\left(1 + x^2 \log|x|\right)^2} =$$

$$= \frac{-x\left(2\log|x| + 1\right)}{\left(1 + x^2 \log|x|\right)^2}.$$

Ricordando che

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

riscriviamo

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-x\left(2\log(-x) + 1\right)}{\left(1 + x^2 \log(-x)\right)^2} & \text{se } x < 0 \\ \\ \dfrac{-x\left(2\log(x) + 1\right)}{\left(1 + x^2 \log(x)\right)^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Il dominio della derivata coincide con quello di f: non vi sono infatti altre condizioni particolari da porre perché f' esista.

L'unico dubbio sta sul punto $x = 0$.
Infatti, dal momento che la funzione f è continua in $x = 0$ ha senso chiedersi se sia derivabile o meno in $x = 0$.
Sfruttando il teorema del limite della derivata, calcoliamo

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} f'(x).$$

Si ha

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x\left(2\log(-x) + 1\right)}{\left(1 + x^2 \log(-x)\right)^2}.$$

Il denominatore, per il limite notevole già richiamato, tende a 1.
Anche il numeratore è riconducibile allo stesso limite notevole. Infatti si può scrivere

$$\lim_{x \to 0^-} -x\left(2\log(-x) + 1\right) = \lim_{x \to 0^-} \left[2(-x)\log(-x) - x\right] = 0 - 0 = 0.$$

In conclusione

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \left[\frac{0}{1}\right] = 0.$$

Poiché tale limite esiste, esso coincide con la derivata sinistra di f in 0 (teorema del limite della derivata).
Procedendo allo stesso modo si trova che anche

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x\,(2\log(x)+1)}{\left(1+x^2\log(x)\right)^2} = 0$$

(bisognava aspettarsi tale fatto, vista la simmetria della funzione).
Ne segue che la funzione f è derivabile in $x = 0$ (in quanto derivata destra e sinistra coincidono e sono finite) e

$$f'(0) = 0,$$

il che significa che il punto di ascissa 0 è un punto stazionario (vale a dire a tangente orizzontale), quindi possibile massimo o minimo relativo per la funzione f.

Studiamo ora i punti stazionari di f.
Imponendo

$$f'(x) = 0,$$

si giunge alla coppia di equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{-x\,(2\log(-x)+1)}{\left(1+x^2\log(-x)\right)^2} = 0 \ (A) & \text{se } x < 0 \\[2ex] \dfrac{-x\,(2\log(x)+1)}{\left(1+x^2\log(x)\right)^2} = 0 \ (B) & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Cominciamo a risolvere la (A), prestando attenzione al fatto che le sue eventuali soluzioni sono da accettarsi solo nel caso in cui siano minori di zero.
Ricordando che una frazione si annulla quando si annulla il suo numeratore, giungiamo all'equazione

$$-x\,(2\log(-x)+1) = 0, \quad x < 0.$$

Si tratta del prodotto di due fattori. Sappiamo, per la legge di annullamento del prodotto, che il prodotto di due o più fattori vale zero quando almeno uno tra i fattori vale zero.
Si ha quindi:

$$-x = 0 \quad \text{oppure} \quad 2\log(-x)+1 = 0.$$

La soluzione particolare $x = 0$ è già stata individuata nei passaggi precedenti.
Ragioniamo sul secondo fattore,

$$2\log(-x)+1 = 0.$$

Si ha
$$\log(-x) = -\frac{1}{2},$$
da cui (applicando la funzione esponenziale a entrambi i membri dell'equazione) si ottiene
$$e^{\log(-x)} = e^{-\frac{1}{2}},$$
cioè
$$-x = e^{-\frac{1}{2}},$$
da cui il punto stazionario
$$x = -e^{-\frac{1}{2}},$$
accettabile in quanto negativo.
Allo stesso modo, ragionando sull'equazione (B), si giunge (tralasciando il fattore $-x$) all'equazione
$$\log x = -\frac{1}{2},$$
da cui il punto stazionario (accettabile)
$$x = e^{-\frac{1}{2}},$$
come c'era da aspettarsi a causa della simmetria.
Cerchiamo di capire la natura dei tre punti stazionari trovati, vale a dire
$$x = -e^{-\frac{1}{2}}, \quad x = 0, \quad x = e^{-\frac{1}{2}}.$$
Studiamo quindi il segno di $f'(x)$.
Studiamo il segno solo per $x > 0$ dopodiché, sfruttando la simmetria, si capirà immediatamente l'andamento di f anche per $x > 0$.
Consideriamo quindi la disequazione
$$\begin{cases} \dfrac{-x\,(2\log(x)+1)}{\left(1+x^2\log(x)\right)^2} \geq 0 \\ x > 0. \end{cases}$$
Studiamo i vari fattori che costituiscono la frazione chiedendoci per quali valori di x essi assumono valori positivi o negativi.
Primo fattore: la disequazione che traduce la domanda quand'è maggiore o uguale di zero il primo fattore è
$$-x \geq 0,$$

che risolta dà la risposta

$$x \leq 0.$$

(il primo fattore, quindi, risulta positivo ogniqualvolta si sostituisca alla x un valore negativo).
Secondo fattore: il secondo fattore risulta positivo quando

$$2 \log x + 1 \geq 0,$$

vale a dire quando

$$\log x \geq -\frac{1}{2}.$$

Per trovare la x dobbiamo applicare a entrambi i membri la funzione inversa del logaritmo che, nel nostro caso, è l'esponenziale in base $e > 1$. Trattandosi di una base maggiore di 1, la corrispondente funzione esponenziale, risulta monotona crescente, pertanto, applicando tale funzione a entrambi i membri della disequazione, non cambieremo il verso che compare.
Si ottiene quindi

$$e^{\log x} \geq e^{-\frac{1}{2}},$$

da cui

$$x \geq e^{-\frac{1}{2}}.$$

Il secondo fattore è quindi positivo ogniqualvolta si sostituisca ad x un valore maggiore o uguale di $e^{-\frac{1}{2}}$.
Per concludere: il terzo fattore.
Imponiamo che tale fattore sia positivo. Si ottiene la disequazione

$$\left(1 + x^2 \log(x)\right)^2 > 0,$$

sempre verificata in quanto si tratta di un quadrato (ed è ben noto che un quadrato è sempre positivo). C'è tuttavia da osservare che c'è il rischio che tale potenza valga 0 (e ciò può succedere soltanto se la base della potenza vale 0): ma dal testo dell'esercizio (in cui si pone l'attenzione solo sul punto $x = 0$) si evince che tale quantità non può mai annullarsi.

In definitiva, la derivata prima, per $x > 0$, è positiva in $]0, e^{-1/2}[$ e negativa altrove, vale a dire in $]e^{-1/2}, +\infty[$. Per simmetria, per $x < 0$, la derivata prima è positiva in $]-\infty, -e^{-1/2}[$ e negativa in $]-e^{-1/2}, 0[$.

Ne segue che la funzione f è strettamente crescente su $]-\infty, -e^{-1/2}[$ e su $]0, e^{-1/2}[$, strettamente decrescente su $]-e^{-1/2}, 0[$ e su $]0, e^{-1/2}[$.
Ricordando lo studio dei punti stazionari possiamo concludere che i punti $x = \pm e^{-1/2}$ sono punti di massimo relativo e assoluto (vista la monotonia di f), mentre $x = 0$ è un punto di minimo

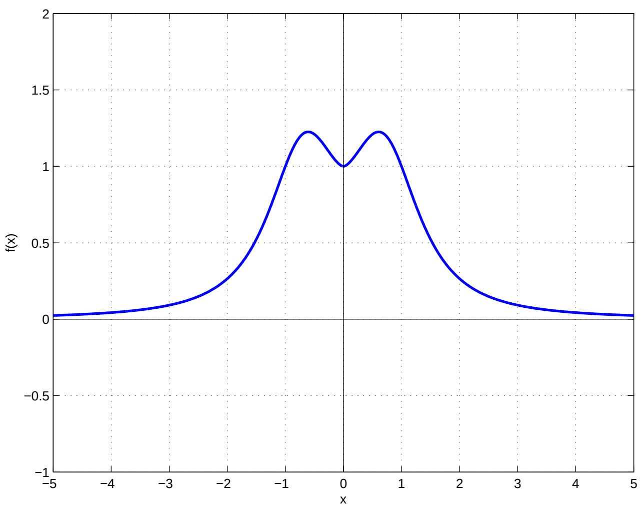
relativo ma non assoluto, in quanto, pensando ai limiti, la funzione tende a 0 per $x \to \pm\infty$ (la retta $y = 0$ è infatti asintoto orizzontale completo).

Osserviamo che tutti e tre i punti di estremo individuati sono punti stazionari (in cui la funzione è derivabile).

Senza calcolare la funzione derivata seconda di f dire se la funzione ammette dei flessi e localizzarli.

Visto l'andamento di f ci si aspettano almeno 4 punti di flesso, 2 per $x > 0$ e 2 per $x < 0$.

Poiché il punto $x = 0$ è di minimo relativo e f è derivabile in tale punto, la funzione f dovrà avere in tale punto concavità rivolta verso l'alto. Analogamente, il massimo relativo (e assoluto) $x = e^{-1/2}$ è un punto in cui la funzione è derivabile. Pertanto, in tale punto di massimo la funzione dovrà avere la concavità rivolta verso il basso.
Ne segue che deve esistere un punto di flesso per f nell'intervallo $]0, e^{-1/2}[$.
Per simmetria, ne esisterà uno tra $]-e^{-1/2}, 0[$.
Proseguiamo.
La funzione f, quando $x \to +\infty$, si avvicina in decrescita all'asintoto orizzontale $y = 0$ rivolgendo quindi la concavità verso l'alto.
D'altra parte, come già osservato, f ha concavità verso il basso in $x = e^{-1/2}$.
Ne segue che deve esistere almeno un altro punto di flesso nell'intervallo $]1, +\infty[$.
Analogamente dovrà esisterne uno in $]-\infty, -e^{-1/2}[$.
Il grafico è riportato in figura.



2) **[T.E. 01/09/2011]**

Sia data la seguente funzione f reale di variabile reale definita da:

$$f(x) = 2\log|\log(x+2)| + \log(x+2).$$

Tracciare un grafico qualitativo della funzione f, in accordo con i risultati ottenuti.

Svolgimento.

Determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie.

Dobbiamo individuare i valori della variabile indipendente reale x per i quali la corrispondente $y = f(x)$ è anch'essa reale.
A tale scopo dobbiamo imporre che gli argomenti dei logaritmi che compaiono siano maggiori strettamente di 0.
Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} |\log(x+2)| > 0 & (A) \\ x+2 > 0 & (B) \end{cases}$$

Risolviamo la (A):

$$|\log(x+2)| > 0.$$

Poiché il valore assoluto di una qualsiasi quantità reale è sempre maggiore o uguale di zero (in particolare, è zero quando l'argomento del valore assoluto è esso stesso zero), la disequazione assegnata è risolta da tutte le x reali, fuorché quelle che annullano l'argomento del valore assoluto. Dobbiamo pertanto imporre

$$\log(x+2) \neq 0.$$

Essendo $0 = \log 1$, possiamo riscrivere l'equazione come

$$\log(x+2) \neq \log 1.$$

A questo punto, dall'iniettività della funzione log, deduciamo

$$x + 2 \neq 1,$$

da cui

$$x \neq -1.$$

La (B) è immediatamente risolta:

$$x > -2.$$

Pertanto il sistema iniziale che ci fornisce il dominio di f diviene

$$\begin{cases} x \neq -1 \\ x > -2 \end{cases}.$$

Dovendo trovare le soluzioni comuni a entrambe le equazioni/disequazioni che compaiono, abbiamo facilmente che il dominio di f è dato da

$$\mathrm{dom} f =]-2, -1[\, \cup\,]-1, +\infty[.$$

Vista la asimmetria del dominio, f non può presentare particolari simmetrie (in particolare, f non è né pari né dispari).

Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per f.

Dobbiamo calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to -2^+} f(x), \qquad \lim_{x\to -1^-} f(x), \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x), \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x).$$

Procediamo con ordine.

Si ha

$$\lim_{x\to -2^+} \left\{2\log|\log(x+2)| + \log(x+2)\right\} = \left[2\log\left|\log(-2^+ + 2)\right| + \log(-2^+ + 2)\right] =$$

$$= \left[2\log\left|\log(0^+)\right| + \log(0^+)\right] = [2\log|-\infty| - \infty] = [2\log(+\infty) - \infty] = [+\infty - \infty],$$

che è una forma indeterminata.

Poniamo quindi

$$\log(x+2) = t.$$

Si ha, poiché $x \to -2^+$,

$$t = \log(x+2) \to \log(0^+) = -\infty,$$

cioè

$$t \to -\infty.$$

Quindi il limite diviene

$$\lim_{t\to-\infty} 2\log|t|+t,$$

che, essendo $|t|=-t$ in quanto $t\to-\infty<0$, si riscrive come

$$\lim_{t\to-\infty}\Big\{2\log(-t)+t\Big\}.$$

Raccogliendo la t, otteniamo

$$\lim_{t\to-\infty}\left\{t\left(\frac{\log(-t)}{t}+1\right)\right\}=[-\infty(0+1)]=-\infty,$$

in quanto

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{\log(-t)}{t}=0,$$

essendo t un infinito di ordine superiore rispetto a $\log(-t)$ (lo si vede, ad esempio, applicando il Teorema di De L'Hopital).
Quindi, riepilogando,

$$\lim_{x\to-2^+} f(x)=-\infty,$$

da cui segue che la retta $x=-2$ è un asintoto verticale destro per la funzione f.
Calcoliamo ora

$$\lim_{x\to-1^-} f(x).$$

Si ha

$$\lim_{x\to-1^-}\Big\{2\log|\log(x+2)|+\log(x+2)\Big\}=\Big[2\log\big|\log(1^-)\big|+\log(1^-)\Big]=$$

$$=\Big[2\log\big|(0^-)\big|+0^-\Big]=\Big[2\log(0^+)+0^-\Big]=\Big[2(-\infty)+0^-\Big]=-\infty.$$

Analogamente si trova

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=-\infty.$$

Ne consegue che la retta $x=-1$ è un asintoto verticale completo per f.

Calcoliamo infine

$$\lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \Big\{2\log|\log(x+2)| + \log(x+2)\Big\} = [2\log|\log(+\infty)| + \log(+\infty)] =$$

$$= [2\log(+\infty) + \infty] = +\infty.$$

Poiché la funzione tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$, potrebbe esistere un asintoto obliquo per f di equazione $y = mx + q$. Cominciamo a calcolare, se esiste finito e non è nullo, il valore di m.

Si ha

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\Big\{2\log|\log(x+2)| + \log(x+2)\Big\}}{x},$$

che si presenta ovviamente nella forma indeterminata $\left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right]$.
Ponendo, come in precedenza,

$$\log(x+2) = t,$$

si ha anzitutto

$$t \to \log(+\infty) = +\infty.$$

Inoltre, da

$$\log(x+2) = t,$$

interpretando t come $\log e^t$, si ha

$$\log(x+2) = \log(e^t),$$

da cui

$$x + 2 = e^t,$$

cioè

$$x = e^t - 2.$$

(Quest'ultimo calcolo è stato effettuato poiché a denominatore compare il termine x, il quale dev'essere espresso nella nuova variabile t con cui riscriveremo il limite.)

Si ha quindi (osservando, tra le altre cose, che $|t| = t$ essendo $t \to +\infty > 0$)

$$m = \lim_{t\to+\infty} \frac{2\log|t| + t}{e^t - 2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{2\log(t) + t}{e^t - 2} = 0,$$

in quanto l'esponenziale tende all'infinito molto più velocemente sia della funzione $\log t$ sia della funzione t.
Poiché risulta

$$m = 0,$$

concludiamo che f non ammette asintoto obliquo.

Non costa nulla calcolare l'intersezione del grafico di f con l'asse delle ordinate. Si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = 2\log|\log(x+2)| + \log(x+2) \\ x = 0 \end{cases} .$$

Si trova immediatamente

$$\begin{cases} y = 2\log(\log 2)) + \log 2 \\ x = 0 \end{cases} .$$

Il grafico di f passa quindi per il punto

$$P(0, 2\log(\log 2) + \log 2).$$

Osserviamo che l'ordinata di tale punto è negativa.

Calcolare la funzione derivata prima di f e determinarne il dominio, classificando eventuali punti di non derivabilità.

Per il calcolo della derivata prima di f, non è detto convenga spezzare il valore assoluto.
Ricordando che

$$(|x|)' = \frac{x}{|x|}$$

e che, per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$x^2 = |x|^2,$$

risulta, per ogni $x \in \text{dom} f$,

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{|\log(x+2)|} \cdot \frac{\log(x+2)}{|\log(x+2)|} \cdot \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} =$$

$$= 2 \cdot \frac{\log(x+2)}{|\log(x+2)|^2} \cdot \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} = 2 \cdot \frac{\log(x+2)}{(\log(x+2))^2} \cdot \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\log(x+2)} \cdot \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} = \frac{2+\log(x+2)}{(x+2)\log(x+2)},$$

cioè

$$f'(x) = \frac{1}{x+2} \cdot \frac{2+\log(x+2)}{\log(x+2)}.$$

La funzione derivata prima f' non è definita in $x = -1$, punto già escluso dal dominio di f.
Pertanto non esistono punti di non derivabilità per f.

Studiare la crescenza e la decrescenza di f, calcolando, qualora esistano, punti di massimo/minimo relativo e punti di massimo/minimo assoluto per f.

Risolviamo anzitutto l'equazione

$$f'(x) = 0,$$

per individuare i punti stazionari di f (vale a dire i punti in cui il grafico di f ha retta tangente orizzontale). Tali punti potranno essere massimi o minimi relativi per la funzione (ricordiamo infatti che il Teorema di Fermat garantisce che se x_0 è di massimo/minimo relativo per f e se f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0)$. Pertanto, condizione necessaria -ma non sufficiente- perché un punto in cui f è derivabile possa essere di massimo o minimo relativo è che $f'(x_0) = 0$).
Risolviamo quindi l'equazione

$$\frac{1}{x+2}\left(\frac{2+\log(x+2)}{\log(x+2)}\right) = 0, \quad x \in]-2,-1[\, \cup\,]1,+\infty[.$$

L'equazione è data dal prodotto di due fattori eguagliato a zero.
Per la legge di annullamento del prodotto, l'equazione è soddisfatta dalle x che annullano o il primo o il secondo fattore.
Poiché l'equazione

$$\frac{1}{x+2} = 0$$

è impossibile (in quanto una frazione vale 0 se e solo se il suo numeratore vale 0), eventuali punti stazionari vanno ricercati tra le soluzioni dell'equazione

$$\frac{2+\log(x+2)}{\log(x+2)} = 0.$$

La frazione si annulla se il suo numeratore vale 0. Si ha quindi

$$2 + \log(x + 2) = 0,$$

da cui

$$\log(x + 2) = -2,$$

cioè

$$\log(x + 2) = \log(e^{-2}),$$

da cui

$$x + 2 = e^{-2},$$

cioè

$$x = -2 + e^{-2},$$

che è accettabile poiché è maggiore di -2 e diverso da -1 (appartiene cioè al dominio di f). L'unico punto stazionario è quindi $x = -2 + e^{-2}$.

Studiamo ora la crescenza/decrescenza di f studiandone il segno della derivata prima. Risolviamo quindi

$$f'(x) \geq 0.$$

La disequazione

$$\frac{1}{x+2}\left(\frac{2 + \log(x+2)}{\log(x+2)}\right) \geq 0, \quad x \in]-2, -1[\cup]1, +\infty[$$

è data dal prodotto di tre fattori confrontato col numero reale 0.

Studiamo quindi, al variare di x, il segno assunto da ciascun fattore, dopodiché costruiremo uno schema complessivo per determinare il segno del prodotto in questione.

1° fattore ≥ 0: si ha

$$2 + \log(x + 2) \geq 0,$$

da cui, come in precedenza,

$$\log(x + 2) \geq -2,$$

cioè

$$\log(x + 2) \geq \log e^{-2},$$

che, per la crescenza della funzione log equivale a

$$x > -2 + e^{-2}.$$

Pertanto il primo fattore che costituisce la derivata prima è positivo per $x \geq -2 + e^{-2}$.

2° fattore > 0.

Si ha

$$x + 2 > 0,$$

da cui

$$x > -2.$$

3° fattore > 0.
Risulta

$$\log(x + 2) > 0,$$

cioè

$$\log(x + 2) > \log 1,$$

da cui, per la crescenza del log,

$$x > -1.$$

Determiniamo a questo punto il segno del prodotto, costruendo lo schema riassuntivo, non dimenticandoci però del campo di esistenza di f.

Otteniamo che la funzione f ha il seguente andamento:

$$f \text{ crescente su } \ ]-2, e^{-2} - 2[\ \cup \ ]-1, +\infty[,$$

$$f \text{ decrescente su } \ ]e^{-2} - 2, -1[.$$

Pertanto, in corrispondenza di $x = e^{-2} - 2$ f presenta un punto di massimo relativo (che non potrà essere assoluto in quanto, ricordando il calcolo dei limiti di f, la funzione f è superiormente illimitata).

Calcolare la funzione derivata seconda di f e studiare la concavità e la convessità di f, calcolando gli eventuali punti di flesso per f.

La derivata prima di f è

$$f'(x) = \frac{2 + \log(x+2)}{(x+2)\log(x+2)}.$$

Si ha

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x+2} \cdot (x+2)\log(x+2) - [2 + \log(x+2)] \cdot \left[\log(x+2) + (x+2) \cdot \frac{1}{x+2}\right]}{(x+2)^2 \log^2(x+2)} =$$

$$= \frac{\log(x+2) - [2 + \log(x+2)]\,[\log(x+2) + 1]}{(x+2)^2 \log^2(x+2)} = -\frac{\log^2(x+2) + 2\log(x+2) + 2}{(x+2)^2 \log^2(x+2)}.$$

Quindi

$$f''(x) = -\frac{\log^2(x+2) + 2\log(x+2) + 2}{(x+2)^2 \log^2(x+2)},$$

il cui dominio è lo stesso di quello di f'.
Annulliamo la derivata seconda, risolvendo l'equazione

$$f''(x) = 0.$$

Si ha

$$-\frac{\log^2(x+2) + 2\log(x+2) + 2}{(x+2)^2 \log^2(x+2)} = 0,$$

da cui

$$\log^2(x+2) + 2\log(x+2) + 2 = 0.$$

Poniamo $\log(x+2) = t$.
Si ottiene l'equazione polinomiale di secondo grado

$$t^2 + 2t + 2 = 0.$$

Tale equazione è impossibile, in quanto il suo discriminante è negativo.

Pertanto, neppure l'equazione nell'incognita x ha soluzioni.

Non esistono quindi punti di f in cui la derivata seconda si annulli: quindi, non potranno esserci punti di flesso per f.

Per studiare la concavità di f, risolviamo la disequazione

$$f''(x) \geq 0,$$

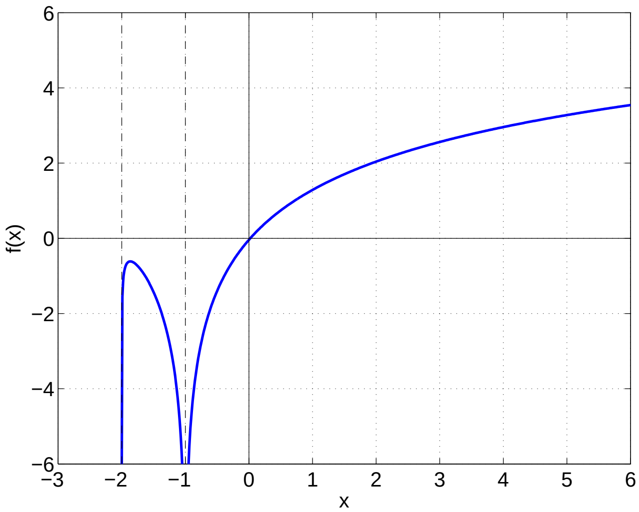
vale a dire

$$-\frac{\log^2(x+2) + 2\log(x+2) + 2}{(x+2)^2 \log^2(x+2)} \geq 0$$

Abbiamo già osservato, dopo avere effettuato il cambiamento di variabile $y = \log(x+2)$, che il numeratore è interpretabile come un polinomio di secondo grado con discriminante negativo. Essendo il coefficiente del termine di secondo grado positivo (1), tale polinomio è sempre positivo.
Inoltre, il denominatore è dato dal prodotto di due fattori elevati al quadrato, quindi positivi (andranno, ovviamente, scartati i valori di x che annullano tali fattori).
Tuttavia, davanti alla linea di frazione, è presente il fattore (-1). Ne segue che la derivata seconda di f è sempre negativa, qualunque valore di x si sostituisca in essa.

Pertanto, in tutto il dominio, la funzione f rivolge la concavità verso il basso.

Il grafico è riportato in figura.



3) **[T.E. 06/04/2009]**

Sia data la seguente funzione f reale di variabile reale definita da:

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{1}{3}\sqrt{2x+1} + \frac{1}{3}.$$

Tracciare un grafico qualitativo della funzione f, in accordo con i risultati ottenuti.

Svolgimento.

Determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie.

Dobbiamo individuare i valori della variabile indipendente reale x per i quali la corrispondente $y = f(x)$ è anch'essa reale.
La funzione arcsin è definita sull'intervallo $[-1, 1]$, mentre la funzione $\sqrt{\ }$ è definita su $[0, +\infty[$.

Fatte queste premesse è ben chiaro che il dominio di f è dato dalle x reali che risolvono il sistema

$$\begin{cases} -1 \leq \dfrac{x}{x+1} \leq 1 \\ 2x + 1 \geq 0 \end{cases},$$

che è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x+1} \geq -1 & (a) \\ \\ \dfrac{x}{x+1} \leq 1 & (b) \\ \\ 2x + 1 \geq 0 & (c) \end{cases}.$$

Risolviamo la disequazione (a):

$$\frac{x}{x+1} \geq -1.$$

Portiamo a primo membro e facciamo il denominatore comune. Otteniamo

$$\frac{x + x + 1}{x+1} \geq 0,$$

vale a dire

$$\frac{2x+1}{x+1} \geq 0.$$

Dobbiamo studiare, al variare di x, il segno della frazione assegnata.
Studiamo il segno di ciascuno dei fattori che costituiscono la frazione data.

1° fattore ≥ 0.
Si ha

$$2x + 1 \geq 0,$$

da cui

$$x \geq -\frac{1}{2}.$$

2° fattore > 0.
Risulta

$$x > -1.$$

Costruendo lo schema globale dei segni dei vari fattori, otteniamo che la disequazione è soddisfatta per

$$x < -1 \ \cup \ x \geq -\frac{1}{2}.$$

Risolviamo ora la disequazione (b):

$$\frac{x}{x+1} < 1.$$

Procedendo come prima otteniamo

$$\frac{-1}{x+1} < 0,$$

vale a dire

$$\frac{1}{x+1} > 0.$$

Ci interessano i valori di x per i quali la frazione risulta positiva. Poiché il numeratore è sempre positivo (trattandosi del fattore costante 1), la frazione potrà risultare positiva solo quando il denominatore sarà positivo.
La disequazione è quindi equivalente alla disequazione

$$x + 1 > 0,$$

che, risolta, dà la soluzione

$$x > -1.$$

Infine, la disequazione (c),

$$2x + 1 \geq 0,$$

è immediatamente risolta ed ha per soluzione

$$x \geq -\frac{1}{2}.$$

Il sistema che dà il dominio di f diviene quindi

$$\begin{cases} x < -1 \ \cup \ x \geq -\dfrac{1}{2} \\ x > -1 \\ x \geq -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Poiché dobbiamo individuare le x comuni a tutte e tre le disequazioni, otteniamo che la soluzione del sistema è

$$x \geq -\frac{1}{2}.$$

Il dominio di f è quindi

$$\mathrm{dom} f = \left[-\frac{1}{2}, +\infty \right[.$$

Vista la asimmetria del dominio, la funzione f non può essere né pari né dispari.
Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per f.

L'unico limite da calcolare è

$$\lim_{x \to +\infty} f(x),$$

in quanto, poiché $x = -\frac{1}{2}$ appartiene al dominio di f, è possibile calcolare direttamente

$$f\left(-\frac{1}{2}\right),$$

per essere così in grado di tracciare il grafico di f.
Risulta

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \arcsin\left(\frac{\frac{-1}{2}}{-\frac{1}{2}+1}\right) - \frac{1}{3}\sqrt{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1} + \frac{1}{3} =$$

$$= \arcsin(-1) - \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}.$$

Pertanto, il grafico della funzione f parte dal punto

$$A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\right).$$

Cacoliamo ora il limite di f a $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right)-\frac{1}{3}\sqrt{2x+1}+\frac{1}{3}\right].$$

Il limite di una somma di funzioni è uguale alla somma dei limiti dei singoli addendi, a patto che non si generino forme indeterminate.
Calcoliamo il limite di ciascun addendo che costituisce f.
Primo addendo.

$$\lim_{x\to+\infty}\arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

L'argomento dell'arcsin si presenta nella forma indeterminata

$$\frac{+\infty}{+\infty}.$$

Come al solito, teniamo in ciascun fattore l'addendo d'infinito dominante.
Il limite dell'argomento diviene quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=\lim_{x\to+\infty}1=1.$$

Quindi, per il teorema di sostituzione, risulta

$$\lim_{x\to+\infty}\arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right)=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}.$$

Consideriamo ora gli addendi rimanenti.
Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3}\sqrt{2x+1}=\frac{1}{3}\sqrt{+\infty}=+\infty.$$

In conclusione

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right)-\frac{1}{3}\sqrt{2x+1}+\frac{1}{3}\right]=\frac{\pi}{2}-\infty+\frac{1}{3}=-\infty.$$

La funzione, dunque non può presentare asintoti orizzontali.
Potrebbe avere un asintoto obliquo a $+\infty$.
Calcoliamo il valore dell'eventuale coefficiente angolare m.
Si ha

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right)-\frac{1}{3}\sqrt{2x+1}+\frac{1}{3}}{x}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\arcsin\left(\dfrac{x}{x+1}\right)}{x} - \frac{\sqrt{2x+1}}{3x} + \frac{1}{3x} = \left[\frac{\dfrac{\pi}{2}}{+\infty} - \frac{+\infty}{+\infty} + \frac{1}{+\infty}\right] =$$

$$= \left[0 - \frac{\infty}{\infty} + 0\right].$$

La forma indeterminata

$$\frac{\infty}{\infty}$$

è presto risolta, osservando che, per $x \to +\infty$,

$$\sqrt{2x+1}$$

ha lo stesso comportamento di

$$\sqrt{2x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x}$$

(visti i soliti discorsi riguardanti i fattori che tendono all'infinito).
Quindi si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x+1}}{3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}}{3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{x}} = \left[\frac{\sqrt{2}}{+\infty}\right] = 0.$$

In definitiva si ha

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = [0 - 0 + 0] = 0.$$

Poiché $m = 0$, non esiste alcun asintoto obliquo per f a $+\infty$.

Calcolare la funzione derivata prima di f classificando eventuali punti di non derivabilità.

Ricordiamo l'espressione analitica di f:

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{1}{3}\sqrt{2x+1} + \frac{1}{3}.$$

Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2}} \cdot \left[\frac{1\cdot(x+1) - x\cdot(1)}{(x+1)^2}\right] - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} \cdot 2 + 0 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2+2x+1-x^2}{(x+1)^2}}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{3\sqrt{2x+1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{2x+1}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{3\sqrt{2x+1}} = \frac{|x+1|}{\sqrt{2x+1}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{3\sqrt{2x+1}}.$$

Poiché, a causa del dominio di f, si ha

$$x \geq -\frac{1}{2},$$

si ha, ovviamente,

$$x > -1.$$

Quindi

$$|x+1| = (x+1).$$

Ne segue che

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{3\sqrt{2x+1}} = \frac{3-x-1}{3(x+1)\sqrt{2x+1}} = \frac{2-x}{3(x+1)\sqrt{2x+1}},$$

cioè

$$f'(x) = \frac{2-x}{3(x+1)\sqrt{2x+1}}.$$

Il dominio della derivata prima di f è dato dalla soluzione del sistema

$$\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ \sqrt{2x+1} \neq 0 \\ 2x+1 \geq 0 \end{cases}.$$

Risolvendo, si trova immediatamente

$$x > -\frac{1}{2}.$$

Il dominio di f' è quindi

$$\text{dom} f' = \left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[.$$

Ci accorgiamo che, a differenza del dominio di f, il punto $x = -\dfrac{1}{2}$ non appartiene al dominio della derivata prima. Dobbiamo quindi indagare circa la natura di tale punto.

Calcoliamo, a tale scopo, il limite della derivata prima appena calcolata per $x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^+$, sperando che tale limite esista.
Si ha

$$\lim_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^+} f'(x) = \lim_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^+} \frac{2-x}{3(x+1)\sqrt{2x+1}} = \left[\frac{2+\frac{1}{2}}{3\left(-\frac{1}{2}+1\right)\cdot\sqrt{0^+}}\right] = +\infty.$$

Poiché tale limite esite, esso coincide con la derivata destra di f in $-\dfrac{1}{2}$.
Quindi

$$f'_+\left(-\frac{1}{2}\right) = +\infty.$$

Non ha invece senso parlare di derivata sinistra, in quanto la funzione f non è definita per $x < -\dfrac{1}{2}$.
Il punto $x = -\dfrac{1}{2}$ è quindi un punto di non derivabilità per f con tangente (destra) verticale (formante un angolo di $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^-$ con la direzione positiva dell'asse x).

Studiare la crescenza e decrescenza di f, calcolando, qualora esistano, punti di massimo/minimo relativo e punti di massimo/minimo assoluto per f.

Cominciamo ad annullare la derivata prima di f per individuare eventuali punti a tangente orizzontale (candidati massimi/minimi relativi)

L'equazione

$$f'(x) = 0,$$

vale a dire

$$\frac{2-x}{3(x+1)\sqrt{2x+1}} = 0,$$

equivalente a

$$2 - x = 0,$$

ha per soluzione

$$x = 2,$$

accettabile, in quanto appartentente al dominio di f e di f'.
Quindi $x = 2$ è un punto stazionario per f. Cercheremo di capire la natura di tale punto, dopo avere effettuato lo studio della crescenza/decrescenza di f per mezzo del segno della derivata prima.
Risolviamo quindi la disequazione

$$f'(x) \geq 0,$$

non dimenticandoci, ovviamente, del dominio di f e di f'.

Si deve quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{2-x}{3(x+1)\sqrt{2x+1}} \geq 0 \\ x > -\dfrac{1}{2} \end{cases} .$$

Risolviamo la prima delle due disequazioni:

$$\frac{2-x}{3(x+1)\sqrt{2x+1}} \geq 0.$$

Si tratta del prodotto di tre fattori dipendenti da x: studiamo il segno di ciascun fattore, dopodiché costruiamo la tabella per ricavare il segno complessivo della frazione.
1° fattore ≥ 0:

$$2 - x \geq 0.$$

Si ha immediatamente

$$x \leq 2.$$

2° fattore > 0:

$$x + 1 > 0,$$

da cui

$$x > -1.$$

Infine, il terzo fattore

$$\sqrt{2x+1}$$

è sempre positivo nel dominio di f e f', trattandosi di una radice quadrata.
La risposta alla disequazione

$$\sqrt{2x+1} > 0$$

è quindi

$$\text{per ogni } x \in \mathrm{dom} f \cap \mathrm{dom} f'.$$

Facendo lo schema del prodotto dei segni, intersecato col dominio di f e f', troviamo che la derivata prima assume il seguente segno: è positiva in $\left]-\frac{1}{2}, 2\right[$, negativa in $]2, +\infty[$. Ricordiamo, inoltre, che la derivata prima è nulla in $x = 2$.

Pertanto, la funzione f è strettamente crescente su $\left]-\frac{1}{2}, 2\right[$ e strettamente decrescente su $]2, +\infty[$.

Ne segue che in corrispondenza di $x = 2$ f presenta un punto di massimo relativo.
In realtà, si tratta di un massimo assoluto. Infatti, visto l'andamento, il grafico di f non può raggiungere ordinate più alte dell'ordinata di tale punto (prima di $x = 2$ f cresce, dopo $x = 2$ f decresce verso $-\infty$).
Calcoliamo l'ordinata del massimo, sostituendo nell'espressione analitica di f il valore $x = 2$. Si ha

$$f(2) = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{3}\sqrt{5} + \frac{1}{3}.$$

Quindi, il punto

$$M\left(2, \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{3}\sqrt{5} + \frac{1}{3}\right)$$

è un punto di massimo assoluto.

Inoltre, sempre osservando la crescenza di f, il punto

$$A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\right),$$

estremo del dominio, è un punto di minimo relativo (ma non assoluto, in quanto la funzione, tendendo a $-\infty$ per $x \to +\infty$, assume ordinate più piccole del'ordinata di tale punto.

Calcolare la derivata seconda di f. Senza studiare il segno della derivata seconda, dire se esiste o meno un punto di flesso per la funzione (si consiglia di calcolare $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$).

La derivata prima di f è

$$f'(x) = \frac{2-x}{3(x+1)\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2-x}{(x+1)\sqrt{2x+1}}.$$

Risulta

$$f''(x) = \frac{1}{3} \cdot \left\{ \frac{-1 \cdot \left[(x+1)\sqrt{2x+1}\right] - (2-x) \cdot \left[1 \cdot \sqrt{2x+1} + (x+1) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{2x+1}} \cdot 2\right]}{(x+1)^2(2x+1)} \right\} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left\{ \frac{-\left[(x+1)\sqrt{2x+1}\right] - (2-x) \cdot \left[1 \cdot \sqrt{2x+1} + \dfrac{x+1}{\sqrt{2x+1}}\right]}{(x+1)^2(2x+1)} \right\} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left\{ \frac{-\left[(x+1)\sqrt{2x+1}\right] - (2-x) \cdot \left[\frac{2x+1+x+1}{\sqrt{2x+1}}\right]}{(x+1)^2(2x+1)} \right\} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left\{ \frac{-\left[(x+1)\sqrt{2x+1}\right] - \left[\frac{(2-x)(3x+2)}{\sqrt{2x+1}}\right]}{(x+1)^2(2x+1)} \right\} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left\{ \frac{\frac{-(x+1)(2x+1) - (2-x)(3x+2)}{\sqrt{2x+1}}}{(x+1)^2(2x+1)} \right\} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left\{ \frac{-2x^2 - x - 2x - 1 - 6x - 4 + 3x^2 + 2x}{(x+1)^2(2x+1)\sqrt{2x+1}} \right\} = \frac{x^2 - 7x - 5}{3(x+1)^2(2x+1)\sqrt{2x+1}}.$$

Quindi

$$f''(x) = \frac{x^2 - 7x - 5}{3(x+1)^2\sqrt{(2x+1)^3}}.$$

Il testo richiede di non studiare il segno della derivata seconda di f, ma di dedurre l'esistenza di eventuali flessi basandosi sullo studio già effettuato e sullo studio del limite

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x).$$

Calcoliamo quindi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2-x}{3(x+1)\sqrt{2x+1}}.$$

Poiché, quando $x \to +\infty$,

$$(2-x) \text{ si comporta come } -x,$$

$$(x+1) \text{ si comporta come } x,$$

$$\sqrt{2x+1} \text{ si comporta come } \sqrt{2x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x},$$

il limite diviene

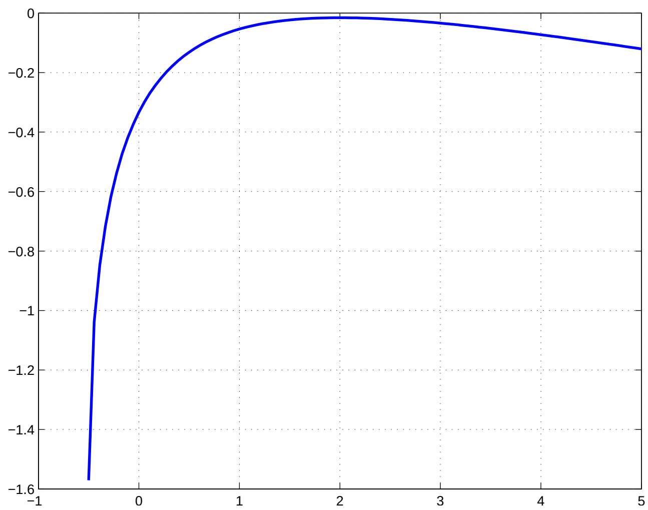
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{3 \cdot x \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{3\sqrt{2}\sqrt{x}} = 0^-.$$

Quindi

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0^-,$$

il che significa che, quando $x \to +\infty$ il grafico di f tende ad avere tangente orizzontale e, poiché il grafico di f è in decrescita verso $-\infty$ quando $x \to +\infty$, il grafico tenderà ad appiattirsi verso la tangente orizzontale rivolgendo la concavità verso l'alto.
Inoltre, come già osservato nello studio della crescenza/decrescenza, f possiede un massimo relativo in $x = 2$ ed è derivabile in $x = 2$; ne segue che in un intorno di $x = 2$ la funzione ha concavità rivolta verso il basso.
Di conseguenza, da queste due considerazioni, deduciamo che f deve per forza possedere un punto di flesso a tangente obliqua nell'intervallo $]2, +\infty[$.

Il grafico è riportato in figura.



4) Sia data la seguente funzione f reale di variabile reale definita da:

$$f(x) = |x|\, e^{\arctan x}.$$

Tracciare un grafico qualitativo della funzione f, in accordo con i risultati ottenuti.

Svolgimento.

Determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie.

Il valore assoluto è definito su tutto $\mathbb{R}$. Poiché l'argomento è $x \in \mathbb{R}$, non c'è nulla da richiedere circa l'argomento del valore assoluto.

Analogo discorso per la funzione arctan, che è definita su tutto $\mathbb{R}$.
Il dominio di f è quindi

$$\mathrm{dom} f = \left]-\infty, +\infty\right[.$$

Vista la simmetria del dominio, la funzione f potrebbe essere pari o dispari.
Controlliamo se f è pari, cioè se $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathrm{dom} f$.
Si ha, ricordando che la funzione arctan è dispari, cioè $\arctan(-x) = -\arctan(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = |-x|\, e^{\arctan(-x)} = |x|\, e^{-\arctan x} = \frac{|x|}{e^{\arctan x}} \neq f(x).$$

Ne segue che la funzione non è pari.
Non è neppure dispari, in quanto non risulta

$$-f(-x) = f(x).$$

Infatti

$$-f(-x) = -\frac{|x|}{e^{\arctan x}} \neq f(x).$$

La funzione f, quindi, non presenta simmetrie.

Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per f.
Cominciamo subito col calcolare le intersezioni del grafico di f con gli assi, visto che l'espressione analitica di f è semplice, trattandosi del prodotto di due fattori (seppur di specie diversa: ricordiamo infatti che è la somma di funzioni di specie diversa a creare problemi alla risoluzione algebrica delle equazioni).
Si ha

$$\begin{cases} y = |x| e^{\arctan x} \\ x = 0 \end{cases},$$

da cui

$$\begin{cases} y = |0|e^{\arctan 0} = 0 \\ x = 0 \end{cases} .$$

Il grafico di f passa quindi per l'orgine degli assi $(0,0)$.
Cercando le intersezioni con l'asse delle x, riconfermiamo il punto appena individuato.
Infatti, il sistema

$$\begin{cases} y = |x|e^{\arctan x} \\ y = 0 \end{cases} ,$$

è equivalente all'unione dei due sistemi

$$\begin{cases} |x| = 0 \\ y = 0 \end{cases} , \qquad \begin{cases} e^{\arctan x} = 0 \\ y = 0 \end{cases} .$$

Solo il primo di essi ammette soluzione, vale a dire la soluzione $(0,0)$.
Il secondo risulta impossibile in quanto l'esponenziale non è mai uguale a 0.

Osserviamo inoltre che la funzione è sempre positiva, in quanto è data dal prodotto di due fattori l'uno maggiore o uguale di 0 per ogni $x \in \mathbb{R}$, l'altro sempre strettamente maggiore di 0.

Passiamo ora allo studio dei limiti per f.
Visto il dominio, dobbiamo solo calcolare

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

Si ha

$$\lim_{x \to -\infty} |x|e^{\arctan x} = \left[+\infty \cdot e^{\arctan(-\infty)}\right] = \left[+\infty \cdot e^{-\frac{\pi}{2}}\right] = +\infty.$$

Può dunque essere che la funzione ammetta asintoto obliquo per $x \to -\infty$.
Cerchiamo l'eventuale valore del coefficiente angolare m.
Si ha, poiché $|x| = -x$ essendo $x < 0$ in quanto $x \to -\infty$,

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|\, e^{\arctan x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x \cdot e^{\arctan x}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -e^{\arctan x} = -e^{\arctan(-\infty)} = -e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

Quindi

$$m = -e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

Calcoliamo, se esiste finito, il valore di q.

Si ha

$$q = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - m \cdot x] = \lim_{x\to-\infty} \left[-xe^{\arctan x} + xe^{-\frac{\pi}{2}}\right] =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -xe^{-\frac{\pi}{2}} \left[\frac{e^{\arctan x}}{e^{-\frac{\pi}{2}}} - 1\right] = \lim_{x\to-\infty} -xe^{-\frac{\pi}{2}} \left[e^{\arctan x + \frac{\pi}{2}} - 1\right].$$

Poiché, quando $x \to -\infty$,

$$y = \arctan x + \frac{\pi}{2} \to -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0,$$

ne segue che il fattore

$$e^{\arctan x + \frac{\pi}{2}} - 1$$

è del tipo

$$e^y - 1, \quad \text{con} \quad y \to 0.$$

L'intento è quello di applicare il limite notevole

$$\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1.$$

A tale scopo, moltiplichiamo e dividiamo il fattore per la quantità infinitesima

$$\left(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Si ha quindi

$$q = \lim_{x\to-\infty} -xe^{-\frac{\pi}{2}} \left[e^{\arctan x + \frac{\pi}{2}} - 1\right] = \lim_{x\to-\infty} -xe^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\left[e^{\arctan x + \frac{\pi}{2}} - 1\right]}{\left(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right)} \cdot \left(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -xe^{-\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Poiché, per ogni $x < 0$,

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2},$$

cioè

$$\arctan x = -\arctan \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2},$$

si ha

$$q = \lim_{x\to-\infty} -xe^{-\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to-\infty} -xe^{-\frac{\pi}{2}} \cdot \left(-\arctan \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -xe^{-\frac{\pi}{2}}\left(-\arctan\frac{1}{x}\right).$$

Poiché, per $x \to -\infty$,

$$\frac{1}{x} \to 0,$$

il fattore

$$\arctan\frac{1}{x}$$

è del tipo

$$\arctan t \quad \text{con} \quad t \to 0.$$

Cerchiamo quindi di applicare il limite notevole

$$\lim_{t\to 0}\frac{\arctan t}{t} = 1,$$

moltiplicando e dividendo opportunamente per il fattore $t = \frac{1}{x}$.
Risulta quindi

$$q = \lim_{x\to-\infty} -xe^{-\frac{\pi}{2}}\frac{\left(-\arctan\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} -xe^{-\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

In definitiva, la retta di equazione

$$y = -e^{-\frac{\pi}{2}}x + e^{-\frac{\pi}{2}}$$

è asintoto obliquo per f a $-\infty$.

Occupiamoci ora del limite per $x \to +\infty$.
Si ha, osservato che in questo caso $|x| = x$,

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{\arctan x} = \left[+\infty e^{\arctan(+\infty)}\right] = \left[+\infty e^{\frac{\pi}{2}}\right] = +\infty.$$

Come nel caso precedente, ricerchiamo l'eventuale asintoto obliquo a $+\infty$.
Si ha

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{\arctan x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\arctan x} = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Per il calcolo di q si deve risolvere il limite

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to+\infty}\left[xe^{\arctan x}-xe^{\frac{\pi}{2}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}xe^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{\arctan x-\frac{\pi}{2}}-1\right).$$

Seguendo lo stesso ragionamento di prima e rifacendosi al limite notevole

$$\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1,$$

ci riconduciamo a

$$q=\lim_{x\to+\infty}xe^{\frac{\pi}{2}}\left(\arctan x-\frac{\pi}{2}\right).$$

Poiché, per ogni $x>0$ si ha

$$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},$$

cioè

$$\arctan x-\frac{\pi}{2}=-\arctan\frac{1}{x},$$

risulta

$$q=\lim_{x\to+\infty}xe^{\frac{\pi}{2}}\left(-\arctan\frac{1}{x}\right),$$

da cui, per il limite notevole

$$\lim_{t\to 0}\frac{\arctan t}{t}=1,$$

$$q=\lim_{x\to+\infty}xe^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)=-e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Pertanto, la retta

$$y=e^{\frac{\pi}{2}}x-e^{\frac{\pi}{2}}$$

è asintoto obliquo per f a $+\infty$.

Calcolare la funzione derivata prima di f classificando eventuali punti di non derivabilità.

La presenza del valore assoluto potrebbe suggerire di suddividere f nell'unione di due funzioni a seconda del segno dell'argomento del valore assoluto.
Tuttavia, cominciamo a derivare (ricordando la derivata del valore assoluto), dopodiché, all'occorrenza, spezzeremo il valore assoluto.
Si ha

$$f(x) = |x|e^{\arctan x}.$$

Osservato che

$$\frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x} \quad \text{per ogni } x \neq 0,$$

si ha

$$f'(x) = \frac{x}{|x|} \cdot e^{\arctan x} + |x|e^{\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{|x|}{x}e^{\arctan x} + |x|e^{\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= |x|e^{\arctan x}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x^2}\right) = |x|e^{\arctan x}\left(\frac{x^2+x+1}{x(1+x^2)}\right).$$

Il valore assoluto non è scomparso derivando; spezziamo l'espressione di f' a seconda del segno dell'argomento del valore assoluto. Si ha immediatamente

$$f'(x) = \begin{cases} -x \cdot e^{\arctan x}\left[\dfrac{x^2+x+1}{x(1+x^2)}\right] & \text{se } x < 0 \\ \\ x \cdot e^{\arctan x}\left[\dfrac{x^2+x+1}{x(1+x^2)}\right] & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

da cui (semplificando x, da supporre quindi diverso da 0),

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{\arctan x}\left(\dfrac{x^2+x+1}{1+x^2}\right) & \text{se } x < 0 \\ \\ e^{\arctan x}\left(\dfrac{x^2+x+1}{1+x^2}\right) & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Studiamo la derivabilità in $x = 0$. Dobbiamo calcolare $f'_-(0)$ e $f'_+(0)$; ricorriamo al teorema del limite della derivata.
Si ha

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} -e^{\arctan x}\left(\frac{x^2+x+1}{1+x^2}\right) = -e^0 \cdot 1 = -1 = f'_-(0);$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{\arctan x}\left(\frac{x^2+x+1}{1+x^2}\right) = e^0 \cdot 1 = 1 = f'_+(0).$$

Ne segue che f non è derivabile in $x = 0$ (in effetti, derivando, avevamo ottenuto la x al denominatore) e presenta un punto angoloso.
In particolare si ha

$$f'_{-}(0) = -1, \qquad f'_{+}(0) = +1.$$

Ciò significa che la retta tangente al grafico di f nei punti immediatamente a sinistra del punto di ascissa 0 (vale a dire il punto (0,0)) ha coefficiente angolare -1, mentre la retta tangente al grafico di f immediatamente dopo $x = 0$ ha coefficiente angolare $+1$ (tali rette tangenti sono proprio la la bisettrice del $2° - 4°$ quadrante e del $1° - 3°$ quadrante, in quanto passano per l'origine degli assi).

Studiare la crescenza e decrescenza di f, calcolando, qualora esistano, punti di massimo/minimo relativo e punti di massimo/minimo assoluto per f.

Annulliamo la derivata prima di f per individuare i punti stazionari (vale a dire a tangente orizzontale), candidati punti di massimo e minimo relativo laddove f è derivabile.

L'equazione

$$f'(x) = 0$$

equivale all'unione dei due sistemi seguenti

$$(A) \begin{cases} -e^{\arctan x}\left(\dfrac{x^2+x+1}{1+x^2}\right) = 0 \\ x < 0 \end{cases} \quad \cup \quad (B) \begin{cases} e^{\arctan x}\left(\dfrac{x^2+x+1}{1+x^2}\right) = 0 \\ x > 0 \end{cases} .$$

Osserviamo che si tratta della stessa equazione (in quanto il fattore moltiplicativo -1 è ininfluente, essendo una quantità fissa indipendente da x che non si annulla mai).
Stiamo quindi studiando l'equazione

$$e^{\arctan x}\left(\frac{x^2+x+1}{1+x^2}\right) = 0, \quad x \neq 0.$$

Per la legge di annullamento del prodotto, si deve avere

$$e^{\arctan x} = 0 \quad \cup \quad \frac{x^2+x+1}{1+x^2} = 0.$$

Poiché l'esponenziale non si annulla mai, può essere solamente

$$\frac{x^2+x+1}{1+x^2} = 0,$$

ossia

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Tale equazione è impossibile (in quanto il suo discriminante è negativo): non esistono quindi punti stazionari per f.
Studiamo la monotonia di f valutando il segno della derivata prima.
Studiamo il segno di f' per $x < 0$.
Si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} -e^{\arctan x}\left(\frac{x^2+x+1}{1+x^2}\right) \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}.$$

(la seconda condizione la si è posta per ricordare che la prima disequazione è da considerarsi solo per le $x < 0$; la derivata prima di f per $x > 0$ ha un'altra espressione, quindi lo studio della crescenza/decrescenza di f per $x > 0$ sarà ricondotto allo studio di un'altra disequazione).
Risolviamo la prima disequazione:

$$-e^{\arctan x}\left(\frac{x^2+x+1}{1+x^2}\right) \geq 0.$$

Il fattore

$$-e^{\arctan x}$$

è sempre negativo (in quanto è l'opposto di un esponenziale e l'esponenziale è sempre positivo).
Il fattore

$$x^2+x+1$$

è anch'esso sempre positivo, essendo un polinomio di secondo grado con discriminante negativo e coefficiente di secondo grado positivo (tale polinomio rappresenta una parabola con concavità verso l'alto che non interseca mai l'asse delle ascisse, pertanto tutti i suoi punti hanno ordinata strettamente maggiore di 0).
Anche il fattore

$$1+x^2$$

è sempre positivo, trattandosi della somma di due quadrati, uno dei quali è sicuramente non nullo.
In definitiva, il segno della derivata prima per $x < 0$ è negativo, qualsiasi x si consideri.
Ne segue che la funzione f è strettamente decrescente su $x < 0$.

Studiamo ora il segno della derivata prima per $x > 0$. Si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} -e^{\arctan x}\left(\frac{x^2+x+1}{1+x^2}\right) \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}.$$

Per gli stessi ragionamenti di prima si ha, in questo caso, che la derivata prima per $x > 0$ è sempre positiva (e mai nulla); pertanto la funzione f è strettamente crescente sull'insieme delle

$x > 0$.
Poiché f è definita in $x = 0$ e vista la dcrescenza e crescenza attorno a $x = 0$, si ha che $x = 0$ è un punto di minimo relativo per f (pur essendo un punto in cui f non è derivabile; si tratta infatti di un punto angoloso).
Meglio ancora, $x = 0$ è un punto di minimo assoluto: infatti, f tende a $+\infty$ sia per $x \to -\infty$ sia per $x \to +\infty$, è continua, strettamente decrescente per $x < 0$ e strettamente crescente per $x > 0$; pertanto non assumerà mai ordinate più basse di $y = f(0) = 0$.

Abbiamo quindi il punto

$$(0, 0)$$

di minimo assoluto per f.

Calcolare la funzione derivata seconda di f e studiare la concavità e la convessità di f, calcolando gli eventuali punti di flesso per f.

Calcoliamo la derivata seconda di f per $x > 0$: per $x < 0$ sarà sufficiente premettere il segno meno all'intera espressione.
Ricordiamo infatti che

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{\arctan x} \left(\dfrac{x^2 + x + 1}{1 + x^2} \right) & \text{se } x < 0 \\ \\ e^{\arctan x} \left(\dfrac{x^2 + x + 1}{1 + x^2} \right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Si ha, per $x > 0$,

$$f''(x) = e^{\arctan x} \cdot \frac{1}{1 + x^2} \cdot \frac{x^2 + x + 1}{1 + x^2} + e^{\arctan x} \cdot \frac{(2x + 1)(1 + x^2) - (x^2 + x + 1)(2x)}{(1 + x^2)^2} =$$

$$= e^{\arctan x} \cdot \frac{x^2 + x + 1}{(1 + x^2)^2} + e^{\arctan x} \cdot \frac{-x^2 + 1}{(1 + x^2)^2} = e^{\arctan x} \cdot \frac{1}{(1 + x^2)^2} \cdot (x + 2).$$

Pertanto

$$f''(x) = \begin{cases} -e^{\arctan x} \cdot \dfrac{x + 2}{(1 + x^2)^2} & \text{se } x < 0 \\ e^{\arctan x} \cdot \dfrac{x + 2}{(1 + x^2)^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Annullando la derivata seconda si trova il punto

$$x = -2.$$

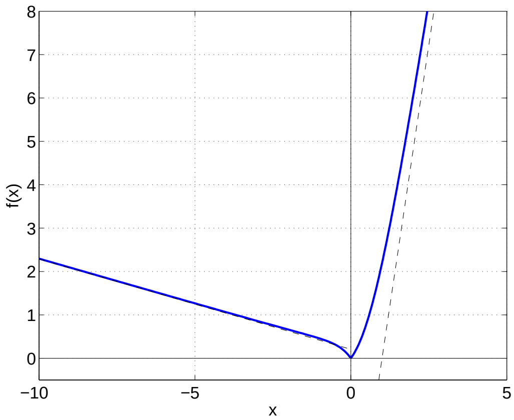
Studiandone il segno, invece, si trova

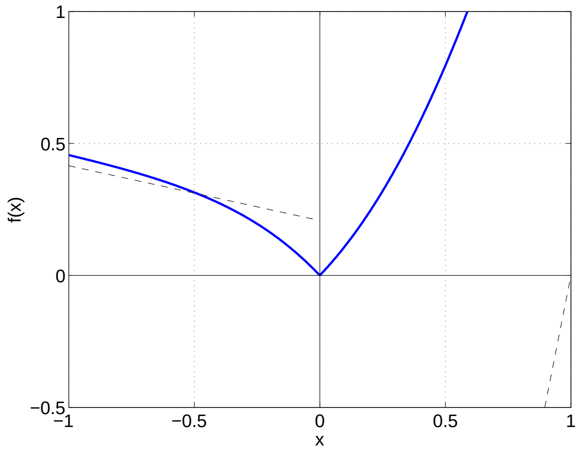
$$f''(x) > 0 \quad \text{per} \quad x < -2 \; \cup \; x > 0,$$

$$f''(x) < 0 \quad \text{per} \quad -2 < x < 0.$$

Ne segue che la funzione ha la concavità rivolta verso il basso nell'intervallo $]-2,0[$, verso l'alto altrove.
Il punto $x = -2$ è un punto di flesso a tangente obliqua.

Il grafico è riportato nella figura di sinistra. Nella figura di destra c'è un ingrandimento dell'andamento di f in un intorno dei $x = 0$ (punto angoloso).





5) Sia data la seguente funzione f reale di variabile reale definita da:

$$f(x) = \sqrt{|x|} - \arcsin \frac{x-1}{|x|+1}.$$

Tracciare un grafico qualitativo della funzione f, in accordo con i risultati ottenuti.

Svolgimento.

Dominio.

Dobbiamo imporre che il radicando della radice quadrata sia maggiore o uguale di 0 e che l'argomento dell'arcsin sia compreso tra i valori -1 e 1. Il sistema da risolvere è dunque

$$\begin{cases} |x| \geq 0 \\ -1 \leq \dfrac{x-1}{|x|+1} \leq 1 \end{cases},$$

che equivale al sistema

$$\begin{cases} |x| \geq 0 & (A) \\ \dfrac{x-1}{|x|+1} \geq -1 & (B) \\ \dfrac{x-1}{|x|+1} \leq 1 & (C) \end{cases}.$$

La disequazione (A),

$$|x| \geq 0$$

è soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$ (infatti, il valore assoluto di qualsiasi numero reale è sempre maggiore o uguale di 0; in particolare è 0 quando il suo argomento è 0).

Risolviamo la (B),

$$\frac{x-1}{|x|+1} \geq -1.$$

Riduciamo allo stesso denominatore

$$\frac{x-1+|x|+1}{|x|+1} \geq 0,$$

vale a dire

$$\frac{x+|x|}{|x|+1} \geq 0.$$

Osserviamo che il denominatore della frazione precedente è sempre strettamente maggiore di 0: infatti, al valore assoluto di x (quantità positiva o nulla) è sommato l'addendo positivo (e non nullo) 1. Di conseguenza, la somma è sempre strettamente maggiore di zero (il più basso valore che può assumere è 1 e ciò succede quando $x = 0$).

Pertanto, ai fini della risoluzione della disequazione (nella quale si deve stabilire il segno della frazione), il fattore che compare a denominatore può essere trascurato (in quanto darebbe sempre contributo positivo nello schema dei segni).
La disequazione si riduce pertanto a

$$x + |x| \geq 0.$$

Tale disequazione è equivalente all'unione dei due sistemi

$$\begin{cases} x < 0 \\ x - x \geq 0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x + x \geq 0 \end{cases} ,$$

ossia

$$\begin{cases} x < 0 \\ 0 \geq 0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x \geq 0 \end{cases} .$$

Il primo sistema è soddisfatto per $x < 0$ (infatti la disequazione

$$0 \geq 0$$

è soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$, in quanto 0 è uguale a 0).
Il secondo sistema è soddisfatto per

$$x \geq 0.$$

In definitiva, unendo le due soluzioni

$$x < 0 \quad \cup \quad x \geq 0$$

si ottiene che la disequazione originaria è soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Passiamo alla disequazione (C).

$$\frac{x-1}{|x|+1} \leq 1.$$

Si ha

$$\frac{x-1-|x|-1}{|x|+1} \leq 0,$$

cioè

$$\frac{x-2-|x|}{|x|+1} \leq 0.$$

Per lo stesso motivo del caso precedente, la disequazione si riduce allo studio di

$$x - 2 - |x| \leq 0.$$

Tale disequazione è equivalente all'unione dei due sistemi

$$\begin{cases} x < 0 \\ x - 2 - (-x) \leq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 0 \\ x - 2 - (x) \leq 0 \end{cases},$$

cioè

$$\begin{cases} x < 0 \\ 2x - 2 \leq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 0 \\ -2 \leq 0 \end{cases},$$

Il primo sistema equivale a

$$\begin{cases} x < 0 \\ x \leq 1 \end{cases},$$

che risolto dà

$$x < 0.$$

Il secondo sitema è risolto da $x \geq 0$, in quanto la seconda disequazione è soddisfatta da qualsivoglia $x \in \mathbb{R}$ (poiché il membro di destra, -2, è costantemente minore di 0).
In definitiva, effettuando l'unione

$$x < 0 \quad \cup \quad x \geq 0,$$

otteniamo che la disequazione (C) è soddisfatta da tutte le $x \in \mathbb{R}$.
Tornando al sistema delle tre disequazioni per l'individuazione del dominio di f, troviamo

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} & (A) \\ \forall x \in \mathbb{R} & (B) \\ \forall x \in \mathbb{R} & (C) \end{cases}.$$

Ne segue che il dominio di f è dato dall'insieme di tutte le x reali. Pertanto

$$\text{dom} f = \mathbb{R} = \left]-\infty, +\infty\right[.$$

Il dominio è simmetrico rispetto a $x = 0$.
Ha quindi senso chiederci se la funzione possa essere pari (simmetrica rispetto all'asse delle ordinate) o dispari (simmetrica rispetto all'origine).
Controlliamo se f è pari, cioè se

$$f(-x) = f(x), \quad \text{per ogni} \;\; x \in \text{dom} f = \mathbb{R}.$$

Ricordando che, per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta

$$|-x| = |x|,$$

si ha
$$f(-x) = \sqrt{|-x|} - \arcsin\frac{-x-1}{|-x|+1} = \sqrt{|x|} - \arcsin\frac{-x-1}{|x|+1} \neq f(x).$$

Ne segue che f non è pari.
Tuttavia, non è nemmeno dispari. Infatti
$$-f(-x) = -\sqrt{|x|} - \arcsin\frac{x+1}{|x|+1} \neq f(x).$$

Quindi f non presenta particolari simmetrie.

Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per f.

Visto il dominio di f, dobbiamo calcolare solamente i limiti per $x \to \pm\infty$.
Cominciamo a calcolare
$$\lim_{x\to-\infty} f(x).$$

Poiché $x \to -\infty$, si ha $x < 0$, quindi $|x| = -x$.
Risulta pertanto
$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{|x|} - \arcsin\frac{x-1}{|x|+1} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{-x} - \arcsin\frac{x-1}{-x+1}.$$

Osserviamo che l'argomento dell'arcsin è
$$\frac{x-1}{-x+1} = \frac{x-1}{-(x-1)} = -1,$$

quindi
$$\arcsin\frac{x-1}{-x+1} = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

Pertanto dobbiamo calcolare
$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{-x} + \frac{\pi}{2} = \left[\sqrt{+\infty} + \frac{\pi}{2}\right] = +\infty.$$

Potrebbe esistere un asintoto obliquo per f a $-\infty$.
Calcoliamo
$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{-x} + \frac{\pi}{2}}{x} = 0,$$

in quanto l'infinito a numeratore è inferiore rispetto all'infinito a denominatore 8a numeratore vi è $(-x)^{1/2}$, a denominatore x^1).
Poiché $m = 0$, non può esistere un asintoto obliquo per f a $-\infty$.
Calcoliamo il limite per f a $+\infty$.

Si ha, essendo in questo caso $|x| = x$,

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} - \arcsin\frac{x-1}{x+1} = \left[\sqrt{+\infty} - \arcsin\frac{+\infty}{+\infty}\right].$$

L'argomento dell'arcsin tende ovviamente a 1 (tenendo l'addendo dominante in ciascun fattore): infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1.$$

Pertanto, grazie al teorema di sostituzione, risulta

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} - \arcsin\frac{x-1}{x+1} = [+\infty - \arcsin(1)] = \left[+\infty - \frac{\pi}{2}\right] = +\infty.$$

Anche in questo caso non esiste alcun asintoto obliquo per f, in quanto il calcolo dell'eventuale coefficiente angolare porta a $m = 0$.
Ne segue che f è superiormente illimitata e non ammette asintoti.

Calcolare la funzione derivata prima di f e determinarne il dominio, classificando eventuali punti di non derivabilità.

Per rendere più agevole lo studio della derivata prima di f conviene riscrivere l'espressione analitica di f per $x < 0$ e per $x \geq 0$. Si ha, ricordando quanto già osservato nei passi precedenti,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} + \dfrac{\pi}{2} & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{x} - \arcsin\dfrac{x-1}{x+1} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

Deriviamo ciascuna espressione (ricordando che la derivat ottenuta è da considerarsi solamente in corrispondenza delle x indicate nell'espressione analitica di f).
Cominciamo a calcolare $f'(x)$ per $x < 0$.
Si ha

$$f(x) = \sqrt{-x} + \frac{\pi}{2},$$

da cui

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x}} \cdot (-1) = \frac{-1}{2\sqrt{-x}}.$$

Calcoliamo $f'(x)$ per $x > 0$, essendo in questo caso

$$f(x) = \sqrt{x} - \arcsin\frac{x-1}{x+1}.$$

Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}} \cdot \frac{1(x+1) - (x-1)\cdot 1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+2x+1-(x^2-2x+1)}{(x+1)^2}}} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{4x}} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{|x+1|}{\sqrt{x}(x+1)^2}.$$

Poiché siamo nel caso $x > 0$, si ha automaticamente $x > -1$, quindi l'argomento del modulo, vale a dire $x + 1$, è sicuramente maggiore di 0.
Pertanto si ha

$$|x + 1| = x + 1.$$

Quindi, per $x > 0$, si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{(x+1)}{\sqrt{x}(x+1)^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} = \frac{x+1-2}{2\sqrt{x}(x+1)} =$$

$$= \frac{x-1}{2\sqrt{x}(x+1)}.$$

Quindi, in definitiva, risulta

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{2\sqrt{-x}} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{x-1}{2\sqrt{x}(x+1)} & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Cia accorgiamo che la derivata prima di f appena calcolata risulta non essere definita in $x = 0$ (punto che avremmo comunque studiato in quanto punto in cui si spezza l'espressione analitica di f a causa del valore assoluto).
L'espressione di f' per $x > 0$ non è definita per $x = -1$, valore che annulla il denominatore della frazione. Tuttavia, tale punto non cade nell'intervallo $x > 0$ su cui consideriamo l'espressione di tale derivata. Pertanto è un punto su cui non cadrà la nostra indagine.

L'unico punto da studiare è $x = 0$.

Calcoliamo derivata destra e sinistra in $x = 0$, sfruttando il teorema del limite della derivata. Si ha

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{2\sqrt{-x}} = \left[\frac{-1}{\sqrt{-(0^-)}}\right] = \left[\frac{-1}{\sqrt{0^+}}\right] = -\infty = f'_-(0).$$

Passando al limite destro si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-1}{2\sqrt{x}(x+1)} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty = f'_+(0).$$

Pertanto, poiché

$$f'_-(0) = -\infty = f'_+(0),$$

si ha che f non è derivabile in $x = 0$ e presenta un punto a tangente verticale (in cui f risulta decrescente, a causa del segno negativo della derivata).

Studiare la crescenza e decrescenza di f, calcolando, qualora esistano, punti di massimo/minimo relativo e punti di massimo/minimo assoluto per f.

Annulliamo la derivata prima di f per individuare eventuali punti stazionari, ossia a tangente orizzonale (candidati massimi e minimi relativi).
Risolviamo quindi l'equazione $f'(x) = 0$ nei casi $x < 0$ e $x > 0$.
Dobbiamo risolvere le due equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{-1}{2\sqrt{-x}} = 0 \\ x < 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \dfrac{x-1}{2\sqrt{x}(x+1)} \\ x > 0 \end{cases} \quad .$$

Il primo sistema non ammette soluzioni, in quanto la derivata prima non si annulla mai (essendo il suo numeratore uguale costantemente a -1).
Il secondo sistema ammette la soluzione $x = 1$. Infatti la derivata prima si annulla per $x = 1$, valore compatibile con la condizione $x > 0$.
Pertanto la funzione f possiede l'unico punto stazionario

$$x = 1.$$

Per studiare la crescenza/decrescenza di f studiamo il segno della derivata prima.
Per $x < 0$ consideriamo la disequazione

$$\frac{-1}{\sqrt{-x}} \geq 0.$$

Essa non è mai soddisfatta, in quanto il numeratore è sempre negativo, mentre il denominatore è sempre positivo (trattandosi di una radice quadrata).
Quindi, per $x < 0$, la derivata prima di f è sempre negativa; ne segue che f è strettamente decrescente su $]-\infty, 0[$.

Per $x > 0$, invece, si ha la disequazione

$$\frac{x-1}{2\sqrt{x}(x+1)} \geq 0.$$

Studiando i vari fattori si ha che la frazione è positiva per

$$x < -1 \quad \cup \quad x \geq 1 \quad \cup \quad x \neq 0.$$

Mettendo a sistema con la condizione $x > 0$, otteniamo che per $x > 0$ la derivata prima è positiva per $x \geq 1$, negativa per $0 < x < 1$.
Ne segue che la funzione f è strettamente decrescente su $]0, 1[$, crescente su $]1, +\infty[$.
Visto l'andamento di f, il punto di ascissa $x = 1$ è un punto di minimo relativo (e assoluto) per f.
Per calcolare l'ordinata di tale punto, sostituiamo $x = 1$ nell'espressione analitica di f. Si ha

$$f(1) = \sqrt{1} - \arcsin \frac{1-1}{1+1} = 1 - \arcsin 0 = 1 - 0 = 1.$$

Quindi il punto

$$(1, 1)$$

è il minimo assoluto della funzione f.

Calcolare la funzione derivata seconda di f e studiare la concavità e la convessità di f, calcolando gli eventuali punti di flesso per f.

Ricordiamo l'espressione analitica di $f'(x)$:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{2\sqrt{-x}} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{x-1}{2\sqrt{x}(x+1)} & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Deriviamo per $x < 0$. Poiché

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(-x)^{-1/2},$$

si ha

$$f''(x) = +\frac{1}{4}(-x)^{-1/2-1}(-1) = -\frac{1}{4}(-x)^{-3/2} = \frac{-1}{4(-x)^{3/2}} = \frac{-1}{4\sqrt{(-x)^3}}.$$

Per $x > 0$ si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x}(x+1)},$$

da cui

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1 \cdot \sqrt{x}(x+1) - (x-1) \cdot \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x+1) + \sqrt{x} \cdot 1 \right)}{x(x+1)^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1 \cdot \sqrt{x}(x+1) - (x-1) \cdot \left(\dfrac{x+1+2x}{2\sqrt{x}} \right)}{x(x+1)^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\dfrac{2x(x+1)-(x-1)(3x+1)}{2\sqrt{x}}}{x(x+1)^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{-x^2+4x+1}{2\sqrt{x} \cdot x(x+1)^2} \right] = \frac{-x^2+4x+1}{4\sqrt{x^3}(x+1)^2}.$$

Quindi

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{4\sqrt{(-x)^3}} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{-x^2+4x+1}{4\sqrt{x^3}(x+1)^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Annulliamo la derivata seconda.
Per $x < 0$ non si annulla mai.
Per $x > 0$ si deve risolvere l'equazione

$$\begin{cases} \dfrac{-x^2+4x+1}{4\sqrt{x^3}(x+1)^2} = 0 \\ x > 0 \end{cases},$$

vale a dire

$$-x^2 + 4x + 1 = 0, \quad x > 0.$$

Si ha

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{5}}{-1} = 2 \pm \sqrt{5}.$$

Solamente la soluzione $x = 2 + \sqrt{5}$ è accettabile, in quanto maggiore di 0.
Risolviamo la disequazione $f''(x) \geq 0$ per studiare la concavità di f.
Si ha, per $x < 0$,

$$\frac{-1}{4\sqrt{(-x)^3}} \geq 0.$$

Tale disequazione non è mai soddisfatta. Infatti, il numeratore è sempre negativo; il denominatore è sempre positivo, trattandosi di una radice quadrata.
Per $x < 0$, quindi, la derivata seconda è sempre negativa, quindi possiamo affermare che la funzione f rivolge la concavità verso il basso per $x < 0$.
Studiamo $f''(x)$ per $x > 0$.
Dobbiamo risolvere, sotto la condizione $x > 0$, la disequazione

$$\frac{-x^2+4x+1}{4\sqrt{x^3}(x+1)^2} \geq 0,$$

vale a dire

$$\frac{x^2 - 4x - 1}{4\sqrt{x^3}(x+1)^2} \leq 0.$$

Il denominatore è sempre positivo (e si annulla, oltre che in $x = 0$, in $x = -1$, punto che non appartiene all'insieme $x > 0$).
Pertanto, siamo ricondotti allo studio della disequazione

$$x^2 - 4x - 1 \leq 0,$$

la cui soluzione è

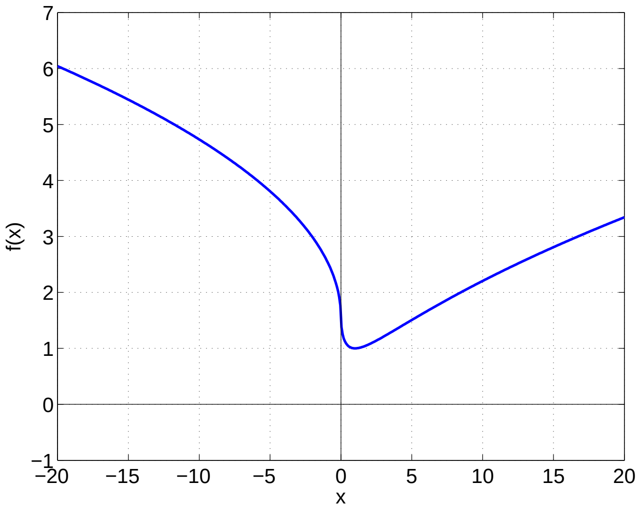
$$x \leq 2 - \sqrt{5} \quad \cup \quad x \geq 2 + \sqrt{5},$$

trattandosi di una parabola con concavità rivolta verso il basso che taglia l'asse delle ascisse in $x = 2 - \sqrt{5}$ e $x = 2 + \sqrt{5}$.
In realtà, dobbiamo intersecare la soluzione con la condizione $x > 0$. Otteniamo quindi che la derivata seconda, per $x > 0$, è positiva per

$$0 < x < 2 + \sqrt{5}$$

e negativa per $x > 2 + \sqrt{5}$.
Ne segue che la funzione, per $x > 0$ ha la concavità rivolta verso l'alto in $]0, 2 + \sqrt{5}[$ e la concavità rivolta verso il basso sull'intervallo $]2 + \sqrt{5}, +\infty[$.
Pertanto, in corrispondenza di $x = 2 + \sqrt{5}$ la funzione f presenta un punto di flesso a tangente obliqua.
Per calcolare l'ordinata di tale punto è sufficiente sostituire $x = 2 + \sqrt{5}$ nell'espressione analitica di f.

Il grafico è riportato in figura.



6) Sia data la seguente funzione f reale di variabile reale definita da:

$$f(x) = \frac{\log^3 |x|}{x|x|}$$

Tracciare un grafico qualitativo della funzione f, in accordo con i risultati ottenuti.

Svolgimento.

Dominio.
Vista la presenza del logaritmo e del denominatore, l'insieme delle x per cui f è definita coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} |x| > 0 \\ x|x| \neq 0 \end{cases}.$$

La prima disequazione,

$$|x| > 0$$

è soddisfatta per ogni $x \neq 0$, in quanto il valore assoluto di un numero reale è sempre positivo e si annulla solo quando è 0 il suo argomento.
La seconda equazione,

$$x|x| \neq 0$$

è ovviamente risolta da

$$x \neq 0.$$

In definitiva, il dominio di f è dato da tutte le x reali tranne $x = 0$. Quindi

$$\mathrm{dom} f =]-\infty, 0[\quad \cup \quad]0, +\infty[\,.$$

Il dominio è simmetrico rispetto allo 0. La funzione f potrebbe quindi essere pari o dispari. Controlliamo se f è pari, vale a dire

$$f(-x) = f(-x) \ \text{ per ogni } \ x \neq 0.$$

Si ha

$$f(-x) = \frac{\log^3 |-x|}{(-x)|-x|} = \frac{\log^3 |x|}{-x|x|} \neq f(x).$$

Tuttavia, f è dispari: infatti

$$f(-x) = \frac{\log^3 |x|}{-x|x|} = -\frac{\log^3 |x|}{x|x|} = -f(x).$$

Pertanto il grafico della funzione f è simmetrico rispetto all'origine del sistema di riferimento. Sarà sufficiente tracciare il grafico per $x > 0$ e ribaltare opportunamente tale grafico per $x < 0$.

Consideriamo quindi la funzione f per $x > 0$:

$$f(x) = \frac{\log^3 x}{x^2}, \quad \text{per } x > 0.$$

Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per f.

Dobbiamo calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x), \quad \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

Cominciamo con

$$\lim_{x \to 0^+} f(x).$$

Si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log^3 x}{x^2} = \left[\frac{(\log(0^+))^3}{0^+} \right] = \left[\frac{-\infty}{0^+} \right] = -\infty.$$

Per la simmetria si avrà ovviamente,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty.$$

Ne segue che la retta $x = 0$ è un asintoto verticale completo per f.
Calcoliamo ora

$$\lim_{x \to +\infty} f(x).$$

Si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log^3 x}{x^2} = \left[\frac{(\log(+\infty))^3}{+\infty} \right] = \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right].$$

D'altra parte, per la scala degli infiniti, sappiamo che x^α va all'infinito più velocemente di qualsiasi potenza di $\log x$.
Pertanto possiamo concludere che

$$\lim_{x \to +\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log^3 x}{x^2} = 0^+.$$

Per la simmetria, si avrà

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^-.$$

Ne segue che la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale completo per f.

Calcolare la funzione derivata prima di f e determinarne il dominio, classificando eventuali punti di non derivabilità.

Ricordiamo che

$$f(x) = \frac{\log^3 x}{x^2}, \quad x > 0.$$

Si ha

$$f'(x) = \frac{3\log^2 x \cdot \frac{1}{x} \cdot x^2 - \log^3 x \cdot 2x}{x^4} = \frac{3x\log^2 x - 2x\log^3 x}{x^4} =$$

$$= \frac{x\log^2 x\,(3 - 2\log x)}{x^4} = \frac{\log^2 x\,(3 - 2\log x)}{x^3}.$$

Quindi

$$f'(x) = \frac{\log^2 x\,(3 - 2\log x)}{x^3}, \quad x > 0.$$

Tale funzione è definita per ogni $x > 0$. Il suo dominio, quindi, coincide con quello della funzione f per $x > 0$.

Studiare la crescenza e decrescenza di f, calcolando, qualora esistano, punti di massimo/minimo relativo e punti di massimo/minimo assoluto per f.

Risolviamo l'equazione

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \\ x > 0 \end{cases},$$

cioè

$$\begin{cases} \dfrac{\log^2 x\,(3 - 2\log x)}{x^3} \\ x > 0 \end{cases}.$$

L'equazione

$$\frac{\log^2 x\,(3 - 2\log x)}{x^3} = 0$$

equivale all'equazione

$$\log^2 x\,(3 - 2\log x) = 0.$$

Per la legge di annullamento del prodotto, essa equivale a

$$\log^2 x = 0 \quad \cup \quad 3 - 2\log x = 0.$$

L'equazione

$$\log^2 x = 0,$$

equivale all'equazione

$$\log x = 0,$$

poiché un quadrato è nullo se e soltanto se è nulla la sua base.
Risolviamo quindi

$$\log x = 0,$$

vale a dire

$$\log x = \log 1,$$

da cui la soluzione

$$x = 1,$$

accettabile in quanto maggiore di 0.
La seconda equazione,

$$3 - 2\log x = 0,$$

diviene

$$-2\log x = -3,$$

cioè

$$\log x = \frac{3}{2},$$

ovvero

$$\log x = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2} \cdot \log e;$$

pertanto l'equazione diventa

$$\log x = \log e^{3/2},$$

da cui la soluzione

$$x = e^{3/2},$$

accettabile perché nell'insieme $x > 0$.
La funzione f possiede quindi due punti stazionari,

$$x = 1 \quad \text{e} \quad x = e^{3/2}.$$

Studiamo il segno della derivata prima.

$$\begin{cases} \dfrac{\log^2 x\,(3-2\log x)}{x^3} \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} .$$

Studiamo la disequazione

$$\frac{\log^2 x\,(3-2\log x)}{x^3} \geq 0$$

Il fattore

$$\log^2 x$$

è sempre maggiore o uguale di 0, trattandosi di un quadrato (in particolare, si annulla per $x = 1$).
Passiamo al secondo fattore

$$3 - 2\log x \geq 0.$$

Si ha

$$-2\log x \geq -3,$$

cioè

$$\log x \leq \frac{3}{2},$$

vale a dire

$$\log x \leq \log e^{3/2}.$$

Vista la crescenza della funzione log in base $e > 1$, si ottiene

$$x \leq e^{3/2}.$$

Terzo fattore:

$$x^3 > 0,$$

da cui

$$x > 0.$$

Creando lo schema dei segni dei vari fattori, osserviamo che la derivata prima è positiva per $0 < x < e^{3/2}$, negativa per $x > e^{3/2}$.
Ciò significa che f è crescente su $]0, e^{3/2}[$ e decrescente su $]e^{3/2}, +\infty[$.

Ne segue che il punto $x = e^{3/2}$ è un punto di massimo relativo. Invece, il punto $x = 1$ è

un punto di flesso a tangente orizzontale: infatti, in tale punto la derivata prima è nulla (tangente orizzontale) ma è positiva in tutto un suo intorno completo.
Per simmetria si avrà che f è decrescente su $]-e^{3/2}, 0[$ e crescente su $]-\infty, -e^{-3/2}[$.
In particolare, $x = -e^{3/2}$ è un punto di minimo relativo e $x = -1$ un punto di flesso a tangente orizzontale.
I precedenti punti di massimo e minimo sono relativi ma non assoluti in quanto, come già constatato nello studio dei limiti, la funzione f è sia superiormente che inferiormente illimitata (ricordiamo infatti che la retta $x = 0$ è un asintoto verticale per f).

Calcolare la funzione derivata seconda di f e studiare la concavità e la convessità di f, calcolando gli eventuali punti di flesso per f.

Calcoliamo, sempre per $x > 0$, la funzione derivata seconda di f.
Ricordiamo quindi che

$$f'(x) = \frac{\log^2 x\,(3 - 2\log x)}{x^3}, \quad x > 0.$$

Si ha

$$f''(x) = \frac{\left[2\log x \cdot \dfrac{1}{x} \cdot (3 - 2\log x) + \log^2 x \cdot \left(\dfrac{-2}{x}\right)\right] \cdot x^3 - \left[\log^2 x\,(3 - 2\log x)\right] \cdot 3x^2}{x^6} =$$

$$= \frac{\left[\dfrac{2\log x}{x}\left(3 - 2\log x - \log^2 x\right)\right] \cdot x^3 - \left[\log^2 x\,(3 - 2\log x)\right] \cdot 3x^2}{x^6} =$$

$$= \frac{\left[2\log x \cdot \left(3 - 2\log x - \log^2 x\right)\right] \cdot x^2 - \left[\log^2 x\,(3 - 2\log x)\right] \cdot 3x^2}{x^6} =$$

$$= \frac{x^2 \log x\left[6 - 4\log x - 9\log x + 6\log^2 x\right]}{x^6} =$$

$$= \frac{3x^2 \log x \cdot \left(2\log^2 x - 5\log x + 2\right)}{x^6} = \frac{3\log x \cdot \left(2\log^2 x - 5\log x + 2\right)}{x^4}.$$

Cioè

$$f''(x) = \frac{3\log x \cdot \left(2\log^2 x - 5\log x + 2\right)}{x^4}, \quad x > 0.$$

Annulliamo la derivata seconda di f, risolvendo l'equazione

$$\frac{3\log x \cdot \left(2\log^2 x - 5\log x + 2\right)}{x^4} = 0 \quad x > 0.$$

Tale equazione è equivalente a

$$\begin{cases} 3\log x \cdot \bigl(2\log^2 x - 5\log x + 2\bigr) \\ x > 0 \end{cases} .$$

L'equazione

$$3\log x \cdot \bigl(2\log^2 x - 5\log x + 2\bigr) = 0$$

equivale, per la legge di annullamento del prodotto, a

$$\log x = 0 \quad \cup \quad 2\log^2 x - 5\log x + 2 = 0.$$

La prima equazione è risolta da

$$x = 1.$$

Ricordiamo che, nello studio della derivata prima avevamo individuato il punto $x = 1$ come flesso a tangente orizzontale (non ci meravigliamo, quindi, di ritrovare tale punto in questa sezione dedicata allo studio della concavità di f).
La seconda equazione, posto $\log x = t$, diviene

$$2t^2 - 5t + 2 = 0.$$

Si ha

$$t_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4},$$

da cui

$$t_1 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad t_2 = 2.$$

Ricordando che $t = \log x$, otteniamo le due equazioni

$$\log x = \frac{1}{2} \quad \cup \quad \log x = 2.$$

Seguendo la stessa procedura delle equazioni precedenti giungiamo alle due equazioni

$$\log x = \log e^{1/2} \quad \cup \quad \log x = \log e^2,$$

da cui le due soluzioni

$$x = e^{1/2} \quad \text{e} \quad x = e^2,$$

entrambe accettabili poiché maggiori di zero.

Studiamo ils egno della derivata seconda per $x > 0$.
La disequazione

$$\frac{3\log x \cdot \left(2\log^2 x - 5\log x + 2\right)}{x^4} \geq, \quad x > 0$$

è data dal prodotto di 3 fattori.
Studiamo il segno di ciascun fattore.
Primo fattore.

$$\log x \geq 0,$$

da cui, a causa della crescenza del log in base $e > 1$,

$$x \geq 1.$$

Secondo fattore.

$$2\log^2 x - 5\log x + 2 \geq 0.$$

Con la precedente sostituzione, $t = \log x$, si trova

$$2t^2 - 5t + 2 \geq 0,$$

da cui

$$t \leq \frac{1}{2} \quad \cup \quad t \geq 2,$$

vale a dire

$$\log x \leq \frac{1}{2} \quad \cup \quad \log x \geq 2.$$

Sempre dalla crescenza del log troviamo

$$x \leq e^{1/2} \quad \cup \quad x \geq e^2.$$

Terzo fattore.

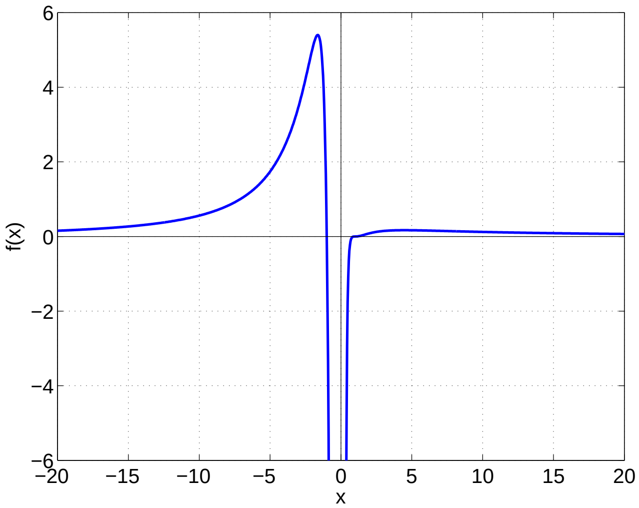
$$x^4 > 0.$$

La disequazione è risolta da tutte le $x \neq 0$ (in quanto x^4 è una potenza di ordine pari, quindi sempre positiva o nulla).
Dallo schema riassuntivo del segno dei vari fattori e ricordandoci che siamo nel caso $x > 0$, otteniamo che la derivata seconda è positiva per $1 < x < e^{1/2}$ e per $x > e^2$, negativa per $0 < x < 1$, $e^{1/2} < x < e^2$.
Quindi f rivolge la concavità verso l'alto su $]1, e^{1/2}[$ e su $]e^2, +\infty[$; rivolge la concavità verso il basso su $]0, 1[$ e su $]e^{1/2}, e^2[$.

Il punto $x = 1$, come già sapevamo, è un punto di flesso (ma a tangente orizzontale, in quanto in esso già si annullava la derivata prima di f); i punti $x = e^{1/2}$ ed $x = e^2$ sono punti di flesso a tangente obliqua.
Sfruttando la simmetria, si ottiene la concavità anche per $x < 0$.
In particolare: f ha concavità verso l'alto negli intervalli $]-1, 0[$ e $]-e^2, -e^{1/2}[$, verso il basso in $]-e^{1/2}, -1[$ e in $]-\infty, -e^2[$.
Il punto $x = -1$ è di flesso a tangente orizzontale; i punti $x = -e^{1/2}$ e $x = -e^2$ sono punti di flesso a tangente obliqua.

Quindi f possiede 6 punti di flesso.

Il grafico è riportato in figura.



7) Sia data la seguente funzione f reale di variabile reale definita da:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}.$$

Tracciare un grafico qualitativo della funzione f, in accordo con i risultati ottenuti.

Svolgimento.

Determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie.

La funzione arctan ha per dominio $\mathbb{R}$: poiché l'arctan che compare nell'espressione analitica di f ha argomento reale per ogni $x \in \mathbb{R}$ (trattandosi del monomio $\frac{x}{2}$), essa non crea mai problemi.
Vista la presenza del denominatore e della radice quadrata, dobbiamo richiedere che

$$\begin{cases} \sqrt{4+x^2} \neq 0 \\ 4+x^2 \geq 0 \end{cases}.$$

Ci si convince facilmente del fatto che le due condizioni precedenti divengono l'unica disequazione

$$4+x^2 > 0,$$

visto che una radice quadrata si annulla se e solo se si annulla il suo radicando.
La disequazione

$$4+x^2 > 0$$

è soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$, visto che il primo membro è dato dalla somma di due quadrati, uno dei quali mai nullo.
Pertanto il dominio di f è tutto $\mathbb{R}$.
Cioè

$$\text{dom} f =]-\infty, +\infty[.$$

Poiché il dominio di f è simmetrico rispetto allo 0, ha senso chiedersi se f è pari o dispari.
Prima di procedere con la verifica di eventuali simmetrie, ricordiamo che la funzione arctan è dispari, il che vuol dire che

$$\arctan(-x) = -\arctan x, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Controlliamo se f è pari o dispari.
Si ha, tenuto conto che arctan è dispari,

$$f(-x) = \frac{-x}{\sqrt{4+(-x)^2}} - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{-x}{2}\right) = \frac{-x}{\sqrt{4+x^2}} + \arctan\frac{x}{2} =$$

$$= -\left(\frac{x}{\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\right) = -f(x).$$

Ne segue che la funzione f è dispari; ciò significa che il suo grafico è simmetrico rispetto all'orgine del sistema di riferimento.

Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per f.

Dobbiamo calcolare solamente i due limiti

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Tuttavia, la simmetria di f rispetto all'orgine, ci autorizza a calcolare solamente

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

e a riutilizzare opportunamente il risultato ottenuto per il caso $x < 0$.
Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} = \left[\frac{+\infty}{+\infty} - \frac{1}{2}\arctan(+\infty)\right]$$

La forma indeterminata

$$\frac{+\infty}{+\infty}$$

è subito risolta, considerando solamente l'addendo dominante e ricordando che, essendo $x \to +\infty$, si ha $x > 0$, quindi $|x| = x$. In effetti si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1.$$

Ne segue che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} = [1 + \arctan(+\infty)] = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Ne segue che la retta $y = 1 - \frac{\pi}{4}$ è un asintoto orizzontale destro per f.
Poiché f è dispari si ha facilmente

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} = -1 + \frac{\pi}{4}.$$

Pertanto la retta $y = -1 + \frac{\pi}{4}$ è un asintoto orizzontale sinistro per f.

Calcolare la funzione derivata prima di f e determinarne il dominio, classificando eventuali punti di non derivabilità.

Ricordando che

$$\frac{x}{\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2},$$

risulta

$$f'(x) = \frac{1\cdot\sqrt{4+x^2} - x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{4+x^2}}\cdot(2x)}{4+x^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{4+x^2} - \cdot\dfrac{x^2}{\sqrt{4+x^2}}}{4+x^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{4+x^2} =$$

$$= \frac{4+x^2-x^2}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{4+x^2} = \frac{4-\sqrt{4+x^2}}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}},$$

cioè

$$f'(x) = \frac{4-\sqrt{4+x^2}}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}.$$

Il dominio della derivata prima coincide con quello della funzione f: infatti il radicando della radice quadrata è sempre strettamente maggiore di zero e il denominatore della frazione non si annulla mai.
Non vi sono quindi punti di non derivabilità per la funzione f.

Studiare la crescenza e decrescenza di f, calcolando, qualora esistano, punti di massimo/minimo relativo e punti di massimo/minimo assoluto per f.

Annulliamo la derivata prima per individuare eventuali punti stazionari (a tangente orizzontale).
Risolviamo quindi l'equazione

$$f'(x) = 0,$$

vale a dire

$$\frac{4-\sqrt{4+x^2}}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}} = 0.$$

Annulliamo quindi il numeratore di tale frazione, risolvendo l'equazione

$$4-\sqrt{4+x^2} = 0.$$

Si ha
$$\sqrt{4+x^2} = 4$$

da cui, elevando al quadrato (osserviamo che il membro di destra è maggiore di zero)

$$4 + x^2 = 16,$$

da cui
$$x^2 = 12,$$

che ha per soluzioni

$$x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}.$$

Pertanto, f possiede i punti stazionari $x = -2\sqrt{3}$ e $x = +2\sqrt{3}$ (non ci meravigliamo di ciò: ricordiamo infatti che la funzione f è dispari).
Studiamo il segno della derivata prima (su tutto $\mathbb{R}$, vista la struttura non complicata della disequazione).
Risolviamo cioè

$$\frac{4 - \sqrt{4+x^2}}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}} \geq 0.$$

I due fattori a denominatore sono entrambi strettamente maggiori di 0, pertanto non influenzano il segno della derivata, dando sempre contributo positivo.
L'unico fattore di segno variabile è quello a numeratore.
La disequazione si riduce quindi allo studio di

$$4 - \sqrt{4+x^2} \geq 0,$$

vale a dire

$$-\sqrt{4+x^2} \geq -4,$$

da cui
$$\sqrt{4+x^2} \leq 4.$$

Elevando al quadrato (poiché entrambi i membri della disequazione sono maggiori di 0) otteniamo, come prima,

$$4 + x^2 \leq 16,$$

cioè
$$x^2 \leq 12.$$

Risulta

$$-2\sqrt{3} \leq x \leq 2\sqrt{3}.$$

La derivata prima è positiva sull'intervallo $]-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}[$ e negativa sulgli intervalli $]-\infty, -2\sqrt{3}[$ e $]2\sqrt{3}, +\infty[$.

Di conseguenza, la funzione f è strettamente decrescente su $]-\infty, -2\sqrt{3}[$ e su $]2\sqrt{3}, +\infty[$, e strettamente crescente su $]-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}[$.
Ne segue che f presenta in $x = -2\sqrt{3}$ un punto di minimo relativo e in $x = 2\sqrt{3}$ un massimo relativo.
Calcoliamone l'ordinata.
Si ha, ad esempio,

$$f(2\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4+12}} - \frac{1}{2}\arctan\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$$

Per simmetria, si ha

$$f(-2\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}.$$

Ricordando che la funzione f possiede i due asintoti orizzontali $y = -1 + \frac{\pi}{4}$ e $y = 1 - \frac{\pi}{4}$ ed è limitata (non esistono infatti asintoti verticali), si ha che i punti precedentemente individuati sono rispettivamente di minimo assoluto e di massimo assoluto.
Infatti, considerano l'ordinata del minimo e la quota dell'asintoto orizzontale più basso, si constata facilmente che

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} < -1 + \frac{\pi}{4}.$$

Analogamente,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} > 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Calcolare la funzione derivata seconda di f e studiare la concavità e la convessità di f, calcolando gli eventuali punti di flesso per f.

Non risulta difficile il calcolo della derivata seconda.
Infatti, riscrivendo opportunamente la derivata prima, si possono evitare molti calcoli.
Procediamo come segue:

$$f'(x) = \frac{4 - \sqrt{4+x^2}}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}} = \frac{4}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}} - \frac{\sqrt{4+x^2}}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}} =$$

$$\frac{4}{(4+x^2)\cdot(4+x^2)^{1/2}} - \frac{1}{4+x^2} = 4(4+x^2)^{-3/2} - (4+x^2)^{-1}.$$

Deriviamo quindi l'espressione

$$f'(x) = 4(4+x^2)^{-3/2} - (4+x^2)^{-1}.$$

Risulta

$$f''(x) = 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)(4+x^2)^{-\frac{3}{2}-1} \cdot (2x) - (-1) \cdot (4+x^2)^{-1-1}(2x) =$$

$$= -12x(4+x^2)^{-5/2} + 2x(4+x^2)^{-2} = \frac{-12x}{(4+x^2)^{5/2}} + \frac{2x}{(4+x^2)^2} =$$

$$= \frac{-12x}{(4+x^2)^2 \cdot \sqrt{4+x^2}} + \frac{1}{(4+x^2)^2} = \frac{2x\left(-6+\sqrt{4+x^2}\right)}{(4+x^2)^{5/2}}.$$

Cioè

$$f''(x) = \frac{2x\left(-6+\sqrt{4+x^2}\right)}{(4+x^2)^{5/2}}.$$

Annulliamo la derivata seconda.
Si ha

$$\frac{2x\left(-6+\sqrt{4+x^2}\right)}{(4+x^2)^{5/2}} = 0$$

se e solo se

$$2x\left(-6+\sqrt{4+x^2}\right) = 0.$$

Per la legge di annullamento del prodotto, l'equazione assegnata equivale a

$$x = 0 \quad \cup \quad -6+\sqrt{4+x^2} = 0.$$

Risolviamo la seconda delle due equazioni, procedendo come con la derivata prima.

$$\sqrt{4+x^2} = 6,$$

da cui, elevando al quadrato,

$$x^2 = 32,$$

che risolta dà le soluzioni

$$x = \pm 4\sqrt{2}.$$

Abbiamo quindi tre punti in cui si annulla la derivata seconda: $x = -4\sqrt{2}, x = 0, x = 4\sqrt{2}$.

Studiamo il segno della derivata seconda.
Il denominatore è sempre positivo (e mai nullo).
Studiamo quindi i rimanenti due fattori.
Primo fattore:

$$2x \geq 0,$$

da cui

$$x > 0.$$

Secondo fattore:

$$-6 + \sqrt{4 + x^2} \geq 0.$$

Si ha

$$\sqrt{4 + x^2} \geq 6,$$

da cui

$$x^2 \geq 32,$$

vale a dire

$$x \leq -4\sqrt{2} \quad \cup \quad x \geq 4\sqrt{2}.$$

Creando lo schema dei segni complessivi, si trova che la derivata seconda è positiva in $]-4\sqrt{2}, 0[$ e in $]4\sqrt{2}, +\infty[$, negativa su $]-\infty, -4\sqrt{2}[$ e in $]0, 4\sqrt{2}[$.
Ne segue che la funzione rivolge la concavità verso l'alto in $]-4\sqrt{2}, 0[$ e in $]4\sqrt{2}, +\infty[$ e verso il basso in $]-\infty, -4\sqrt{2}[$ e in $]0, 4\sqrt{2}[$.
Di conseguenza, i punti $x0 - 4\sqrt{2}$, $x = 0$, $x = 4\sqrt{2}$ sono punti di flesso a tangente obliqua per f.

OSSERVAZIONE.

A conclusione dell'esercizio, osserviamo che ci saremmo potuti aspettare l'esistenza dei tre punti di flesso, già considerando lo studio di f fino alla derivata prima.

In effetti il punto di flesso $x = 0$ ce lo si poteva immaginare visto che la funzione presenta in $x = -2\sqrt{2}$ e in $x = +2\sqrt{2}$ rispettivamente un minimo e un massimo relativo ed è derivabile in tali punti (sappiamo infatti, dalla teoria, che una funzione derivabile in x_0 e in tutto un suo intorno che presenti in x_0 un minimo relativo ha concavità verso l'alto in tale punto. Concavità verso il basso, invece, in un punto di massimo relativo. Nel caso particolare della funzione f, tra i due punti di estremo dev'esserci per forza un punto in cui cambia la concavità.)
Per quanto riguarda, invece, il flesso $x = -4\sqrt{2}$, è naturale sospettarne l'esistenza: infatti, la

funzione f ha in $x = -2\sqrt{2}$ un minimo ed è derivabile in tale punto (quindi ha concavità verso l'alto), a $-\infty$ tende dal basso (vista la monotonia) all'asintoto orizzontale $y = -1 + \frac{\pi}{4}$ (quindi vi tende con concavità verso il basso). Ne segue che deve esistere un punto di flesso nell'intervallo $]-\infty, -2\sqrt{2}[$.
Analogo discorso per il flesso in $x = 4\sqrt{2}$.

Il grafico è riportato in figura.