# Derivate di ordine superiore al secondo

In maniera analoga a quanto fatto per la derivata seconda, si può definire la derivata terza di $f$ in $x_0$, se esiste, come la derivata prima in $x_0$ della derivata seconda di $f$:

$$f'''(x_0) = (f'')'(x_0)$$

ed in generale, per $k \geq 1$, la la derivata di ordine $k$ di $f$ in $x_0$ è

$$f^{(k)}(x_0) = (f^{(k-1)})'(x_0).$$

Per definizione si pone $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$, ovvero la derivata di ordine zero di una funzione è la funzione stessa.

Es. $f(x) = x^4 + \sin(x)$ $\qquad$ $f'(x) = 4x^3 + \cos(x)$

$f''(x) = 12x^2 - \sin(x)$, $\qquad$ $f'''(x) = f^{(3)}(x) = 24x - \cos(x)$.

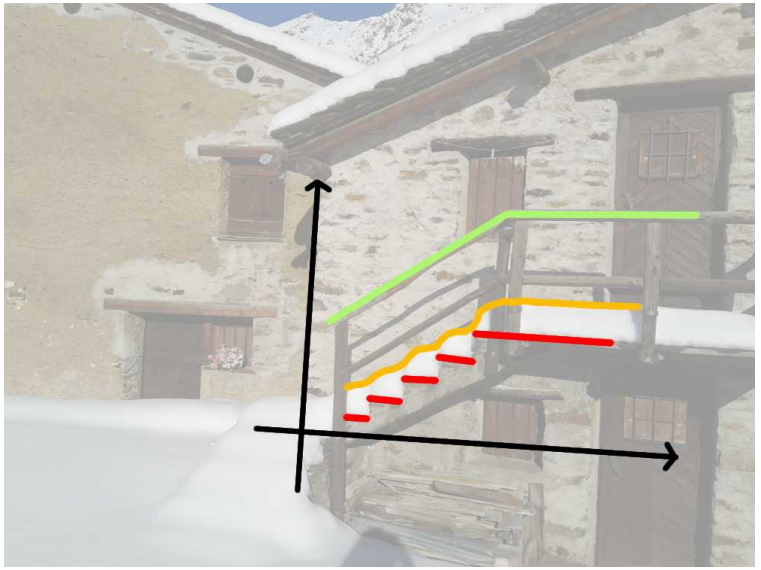
Def. Una funzione $f$ si dice di classe $\mathcal{C}^k$ (con $k \geq 0$) su un intervallo $I$, se essa è derivabile $k$ volte in $I$ e se la funzione derivata $k-$sima di $f$ ($f^{(k)}(x)$) è un funzione continua su $I$. L'insieme delle funzioni di classe $\mathcal{C}^k$ su $I$ è denotato con $\mathcal{C}^k(I)$.

$\mathcal{C}^\infty(I)$ è l'insieme delle funzioni che sono derivabili un numero arbitrario ($\infty$) di volte su $I$.

Es. $f(x) = e^x$, $\qquad f^{(k)}(x) = e^x$, $k = 1, 2, .....$
Qualunque sia $k$, la derivata $f^{(k)}(x)$ coincide con $f$ che è una funzione continua su $\mathbb{R}$, quindi $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ .

Es. $f(x) = \sqrt{x}$, $I = [0, +\infty)$: $\qquad f \in \mathcal{C}^0(I)$: in $x = 0$ $f$ è definita, continua, ma non derivabile, quindi $f \notin \mathcal{C}^1(I)$.

# Esempi



$f(x)$ discontinua, 'a scala'

$f(x)$ continua, con un punto angoloso

$f(x)$ continua e derivabile

# Differenza tra $f$ derivabile in $I$ e $f \in \mathcal{C}^1(I)$

Sia $I \subseteq \mathrm{dom}(f)$.

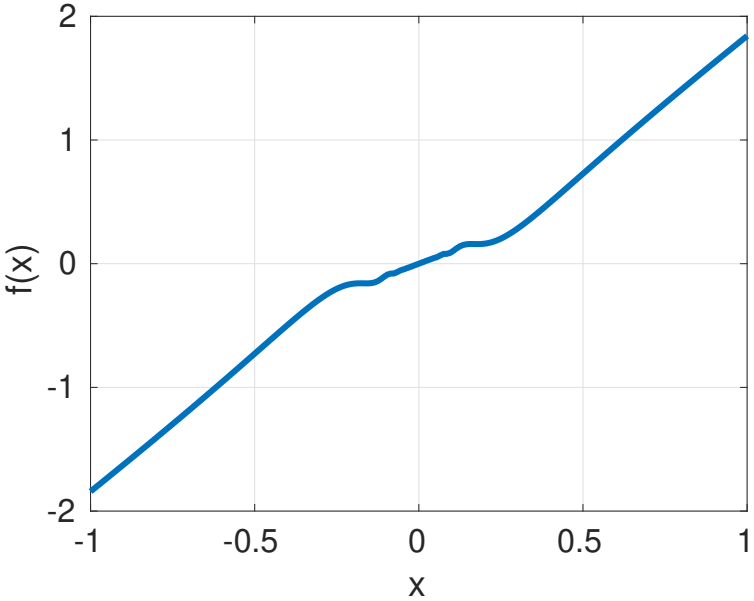
- dire $f$ derivabile in $I$ vuol dire $\exists f'(x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I$
- dire $f \in \mathcal{C}^1(I)$ vuol dire $f$ derivabile in $I$ e $f'(x)$ è continua in $I$

Esempio. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

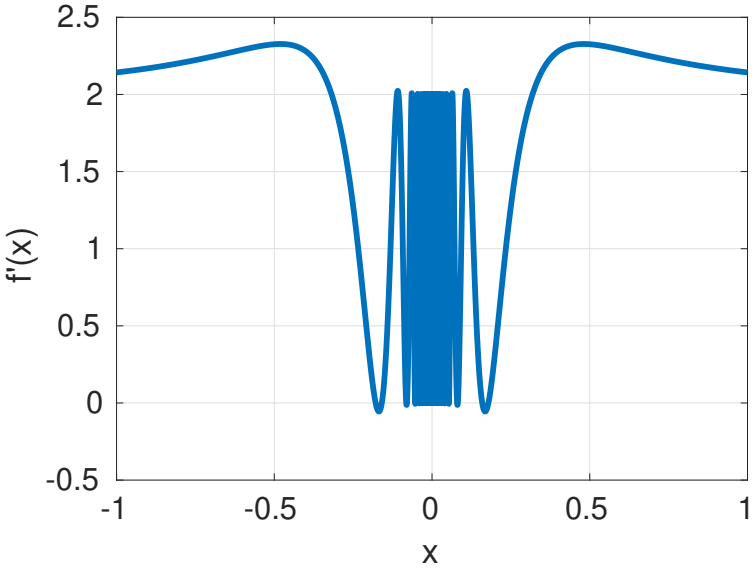
$f$ è derivabile in tutto il suo dominio e risulta

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) + 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Tuttavia $f'$ presenta in $x_0 = 0$ un punto di discontinuità di seconda specie perché $\nexists \lim_{x \to 0} f'(x)$.




$f(x)$




$f'(x)$

# Funzioni infinitesime e loro confronto

Ricordiamo che $f$ si dice infinitesima per $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Siano $f$ e $g$ due funzioni infinitesime per $x \to x_0$. Dopo aver risolto la forma indeterminata $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, possiamo trovare:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & \text{(caso 1)} \\ \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{(caso 2)} \\ \infty & \text{(caso 3)} \end{cases}$$

Nel caso 1 diciamo che $f$ è un infinitesimo di ordine superiore a $g$ (lo 0 di $f$ pesa di più di quello di $g$).

Nel caso 2 diciamo che $f$ e $g$ sono infinitesimi dello stesso ordine (lo 0 di $f$ e quello di $g$ pesano allo stesso modo).

Nel caso 3 diciamo che $f$ è infinitesimo di ordine inferiore a $g$ (lo 0 di $f$ pesa meno di quello di $g$).

# Funzioni infinitesime e 'o piccolo'

Definizione. Siano $f(x)$ e $g(x)$ infinitesime quando $x \to x_0$.
Diciamo che $f(x)$ è un "o piccolo" di $g(x)$ quando $x \to x_0$ e scriviamo

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0 \,,$$

se succede che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Esempio. $sin(x^2) = o(x)$ quando $x \to 0$ perché
$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{sin(x^2)}{x} = 0.$

Le espressioni "$f(x) = o(g(x))$ quando $x \to x_0$" e "$f$ è un infinitesimo di ordine superiore a $g$ quando $x \to x_0$" sono equivalenti e significano che $f(x)$ tende a zero più velocemente di $g(x)$ quando $x \to x_0$.

# Il simbolo "o piccolo"

$f(x) = o(1)$ per $x \to 0$ vuol dire $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{1} = \lim_{x\to 0} f(x) = 0$, cioè $f(x)$ è infinitesima per $x \to 0$.

Esempi.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\sin(x) = o(1)$ | per $x \to 0$, | $\sin(x) \sim x$ | per $x \to 0$, |
| $1 - \cos(x) = o(1)$ | per $x \to 0$, | $1 - \cos(x) \sim x^2/2$ | per $x \to 0$, |
| $e^x - 1 = o(1)$ | per $x \to 0$, | $e^x - 1 \sim x$ | per $x \to 0$. |

# Calcolo di forme indeterminate del tipo 0/0

Quando si deve calcolare il limite di rapporto di funzioni infinitesime per $x \to 0$, si raccoglie la potenza di $x$ al minimo esponente.

Es. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 6x}{x^4 - 3x} =$

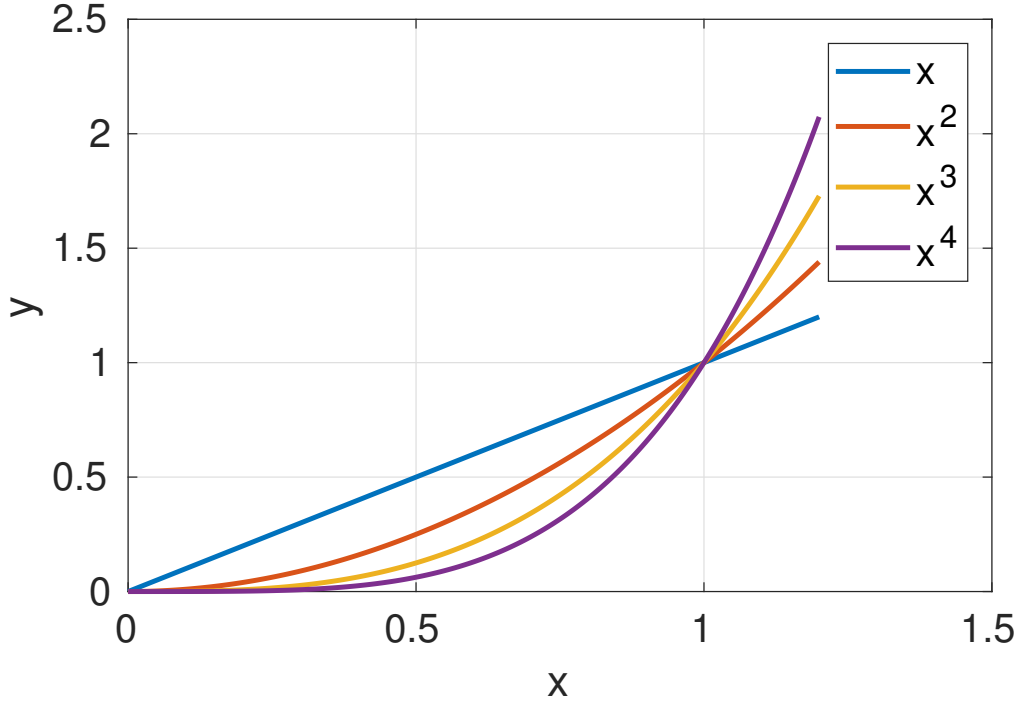
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(6 - 2x + x^2)}{x(-3 + x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{(6 - 2x + x^2)}{(-3 + x^3)} = -2$$

Il monomio di grado minimo è quello principale, ovvero quello più grande, quello predominante.

# Confronto di infinitesimi $x^n$ per $x \to 0$

Fissato $x \in (0,1)$, minore è l'esponente $n$ e maggiore è il valore $x^n$.

| $x$ | $>$ | $x^2$ | $>$ | $x^3$ | $>$ | $x^4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $10^{-1}$ | $>$ | $10^{-2}$ | $>$ | $10^{-3}$ | $>$ | $10^{-4}$ |
| $10^{-2}$ | $>$ | $10^{-4}$ | $>$ | $10^{-6}$ | $>$ | $10^{-8}$ |
| $10^{-3}$ | $>$ | $10^{-6}$ | $>$ | $10^{-9}$ | $>$ | $10^{-12}$ |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | | | |



# Il simbolo "o piccolo"

Data $f(x) = 2x^2 - 4x^3 + 7x^5 + 2x$ mettiamo in evidenza il termine principale (quello di grado minimo):

$$f(x) = 2x + 2x^2 - 4x^3 + 7x^5$$

Poiché

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - 4x^3 + 7x^5}{x} = \lim_{x\to 0}(2x - 4x^2 + 7x^4) = 0,$$

allora

$$2x^2 - 4x^3 + 7x^5 = o(x) \qquad \text{per } x \to 0$$

cioè $2x^2 - 4x^3 + 7x^5$ va a zero più velocemente di $x$ quando $x \to 0$ e scriviamo

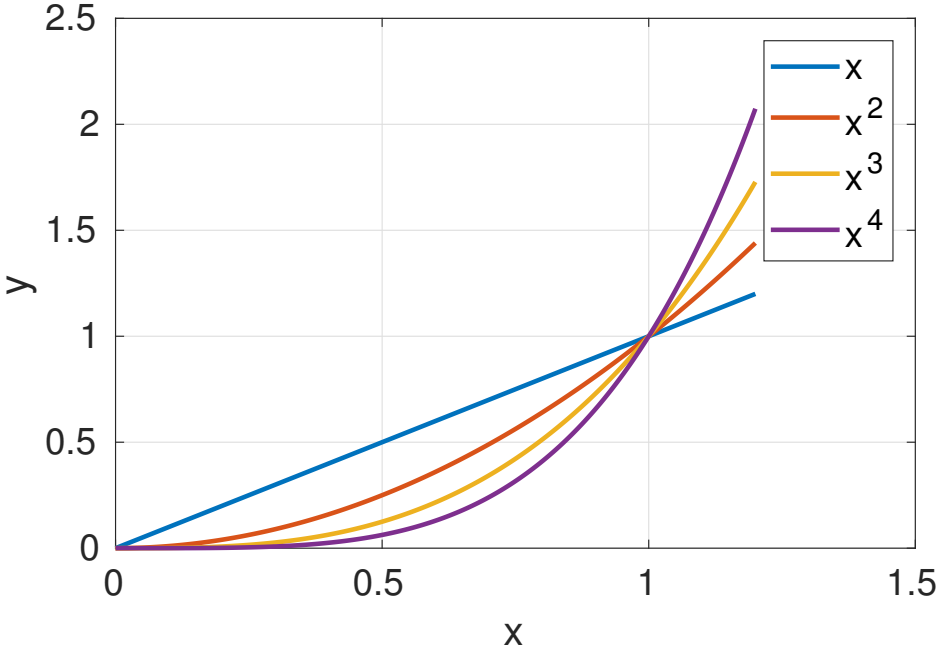
$$f(x) = 2x + 2x^2 - 4x^3 + 7x^5 = 2x + o(x)$$

# Confronto di monomi

Se $p > q \geq 0$, allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^p}{x^q} = \lim_{x\to 0} x^{p-q} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^p = o(x^q), \text{ per } x \to 0.$$

Se $p > q \geq 0$, $x^p$ tende a zero più velocem. di $x^q$, per $x \to 0$




Quando $x \to 0$

$x^4 = o(x^3)$

$x^3 = o(x^2)$

$x^2 = o(x)$

$x^3 = o(x)$

.....

# Algebra degli infinitesimi

Oss. È come lavorare con le potenze.

Es. $(3x^2 + o(x^2)) + (2x^2 + o(x^2)) = 5x^2 + o(x^2)$

$$(3x^2 + o(x^3)) + (2x^2 + o(x^2)) = 5x^2 + o(x^2)$$

$$(3x^2 + o(x^3)) + (2x + o(x^2)) = 2x + 3x^2 + o(x^2) = 2x + o(x)$$

$$(3x^3 + o(x^3)) + (2x + o(x^2)) = 2x + 3x^3 + o(x^2) = 2x + o(x^2)$$

$$\frac{5x^3 + o(x^3)}{x^2} = 5x + o(x)$$

Siano $p,\ q \geq 0$

| | |
|---|---|
| $o(x^p) \pm o(x^p) = o(x^p)$ | per $x \to 0$ |
| $o(x^p) \pm o(x^q) = o(x^n), \quad n = \min(p, q)$ | per $x \to 0$ |
| $x^q o(x^p) = o(x^{p+q})$ | per $x \to 0$ |
| $o(x^p)/x^p = o(1)$ | per $x \to 0$ |
| $o(x^p)/x^q = o(x^{p-q}) \quad p \geq q$ | per $x \to 0$ |

Consideriamo il limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3-2x^2+6x}{x^3-3x^2}$ e riscriviamo i polinomi a numeratore e denominatore evidenziando:

il termine principale (=quello di grado minore)
e raggruppando gli altri monomi nel termine "o piccolo":

$$x^3-2x^2+6x = 6x + o(x)$$
$$x^3-3x^2 = -3x^2 + o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3-2x^2+6x}{x^3-3x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{6x+o(x)}{-3x^2+o(x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{6x}{-3x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{-x} = -\infty$$

# I POLINOMI DI TAYLOR

Brook Taylor (1685 – 1731) matematico inglese

# A cosa servono?

- Per calcolare $e^x$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\log(x)$ con una calcolatrice o con un computer,
- per risolvere limiti complessi che portano a forme $\frac{0}{0}$ del tipo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\log(1+2x)\right) - e^{2x} + 1}{\tan x^2} = \frac{0}{0},$$

  in cui il Teorema di de l'Hôpital e i limiti fondamentali non sono di molto aiuto,

L'idea di Taylor: APPROSSIMARE le funzioni goniometriche, esponenziali, logaritmiche, irrazionali, etc, con dei polinomi, partendo dai valori noti di $f$ e delle sue derivate in un punto $x_0$ particolare.

# Polinomio di Taylor

Sia $f$ definita in un intorno di $x_0$, continua e derivabile $n \geq 0$ volte in $x_0$. Voglio costruire un polinomio $p_n \in \mathbb{P}_n$ che condivide con $f$ i valori di tutte le derivate nel punto $x_0$ fino all'ordine $n$, cioè:

$$\begin{aligned}
p_n(x_0) &= f(x_0) \\
p_n'(x_0) &= f'(x_0) \\
p_n''(x_0) &= f''(x_0) \\
p_n^{(3)}(x_0) &= f^{(3)}(x_0) \\
\dots &= \dots \\
p_n^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0)
\end{aligned}$$

Questo polinomio esiste unico, è detto polinomio di Taylor $p_n(x)$ di $f$ centrato in $x_0$ ed ha grado $n$ ed è così definito:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Si ricorda che $f^{(0)}(x) = f(x)$, cioè la derivata di ordine 0 è la funzione stessa.

# Calcoliamo un polinomio di Taylor

$f(x) = e^x$ con $x_0 = 0$, $n \geq 0$

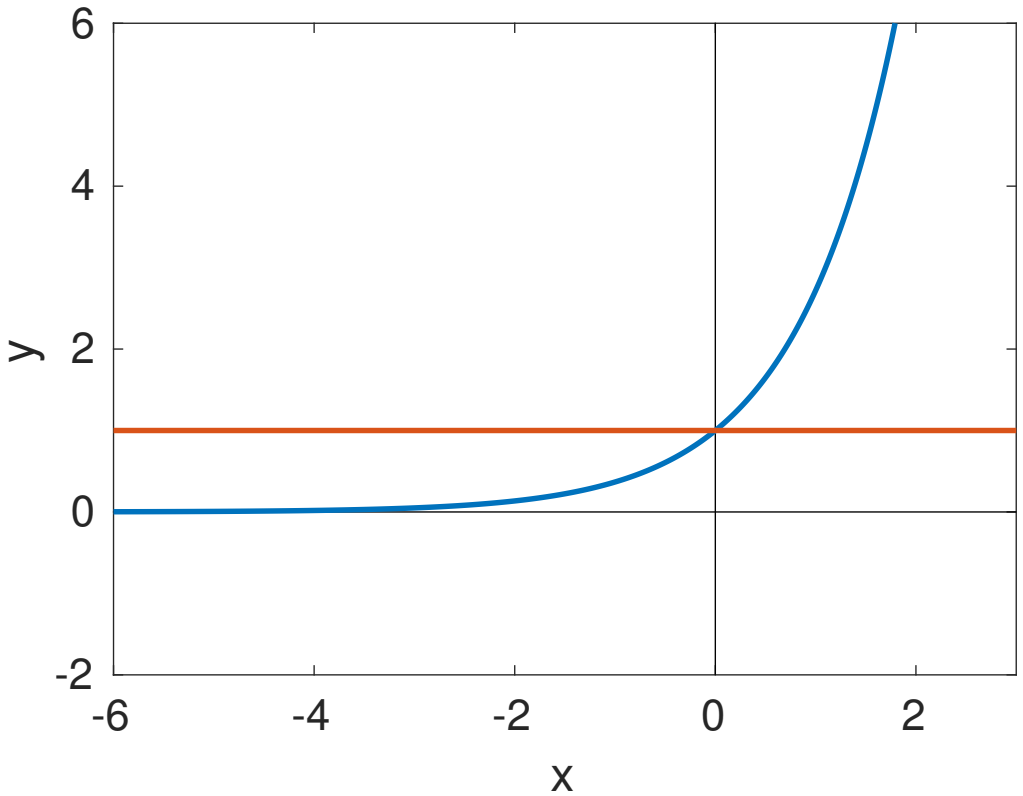
Per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$.

$$
\begin{aligned}
n = 0 \qquad & p_0(x) = f(x_0) = f(0) = 1 \\
n = 1 \qquad & p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 1 + x \\
n = 2 \qquad & p_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \\
n = 3 \qquad & p_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 \\
n > 3 \qquad & p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}
\end{aligned}
$$

# Esempio

Consideriamo la funzione $f(x) = e^x$ e il punto $x_0 = 0$.
Costruiamo:

$$p_0(x) = 1 \qquad \text{(costante che interseca } f(x) \text{ in } x_0 = 0)$$

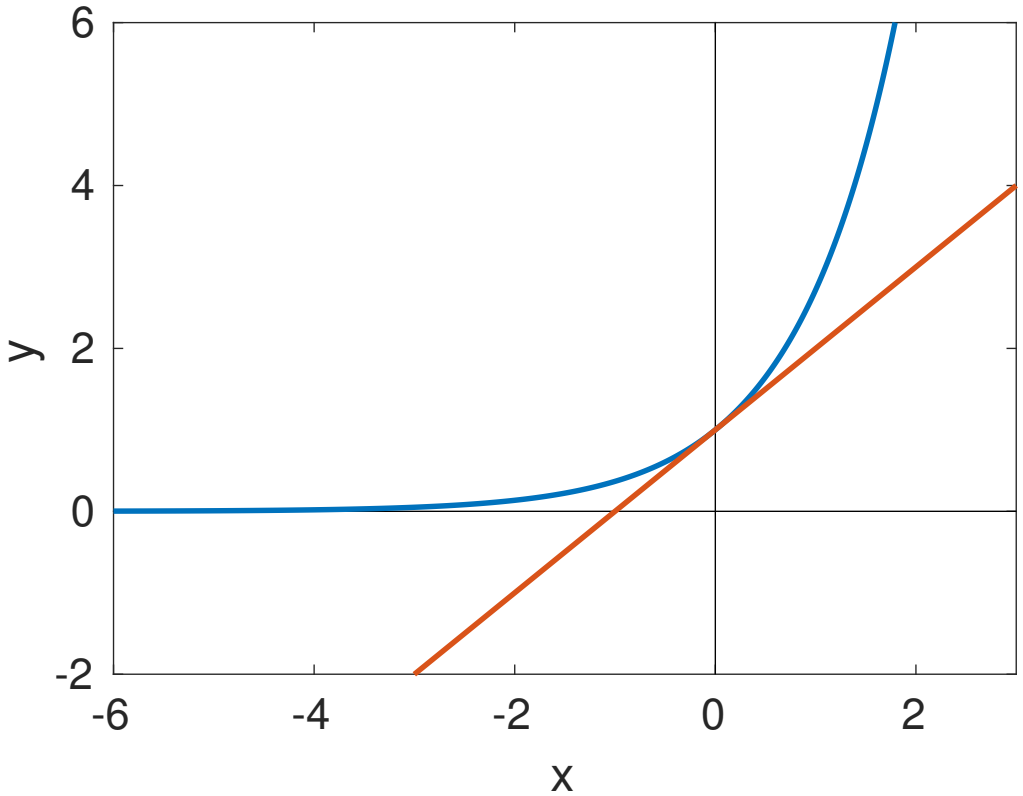



Si ha: $f(0) = p_0(0)$

# Esempio

Consideriamo la funzione $f(x) = e^x$ e il punto $x_0 = 0$.
Costruiamo:

$$p_1(x) = 1 + x \qquad \text{(tangente ad } f(x) \text{ in } x_0 = 0)$$

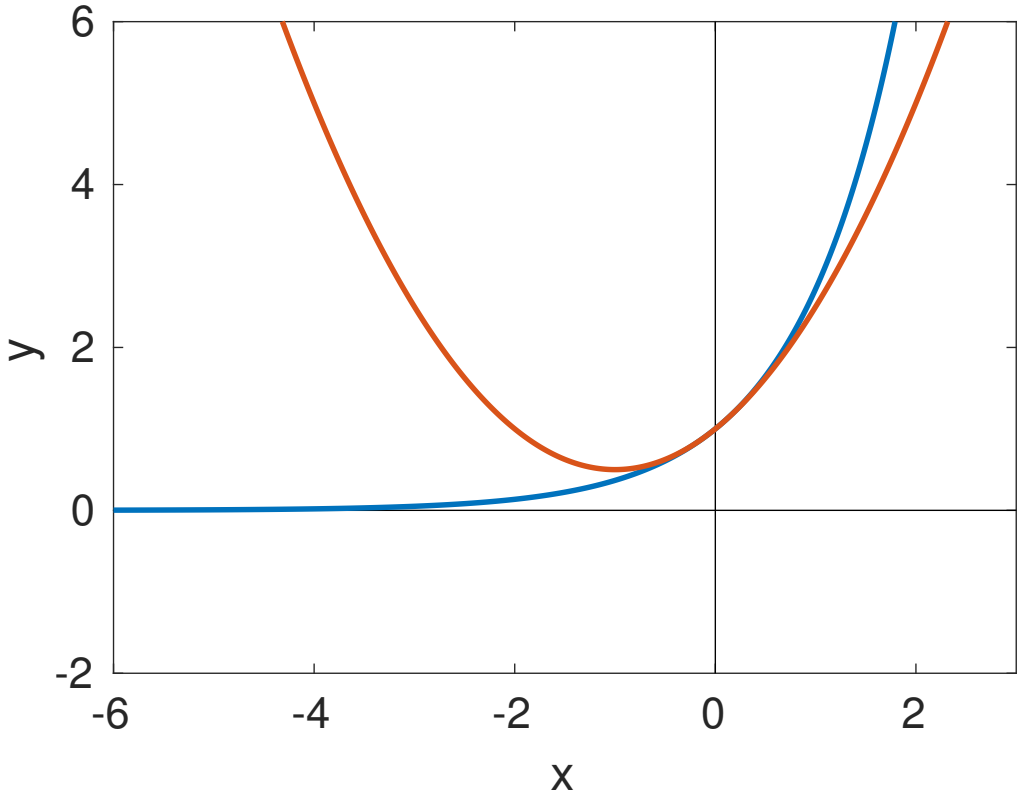



Si ha: $f(0) = p_1(0)$, $f'(0) = p_1'(0)$

# Esempio

Consideriamo la funzione $f(x) = e^x$ e il punto $x_0 = 0$.
Costruiamo:

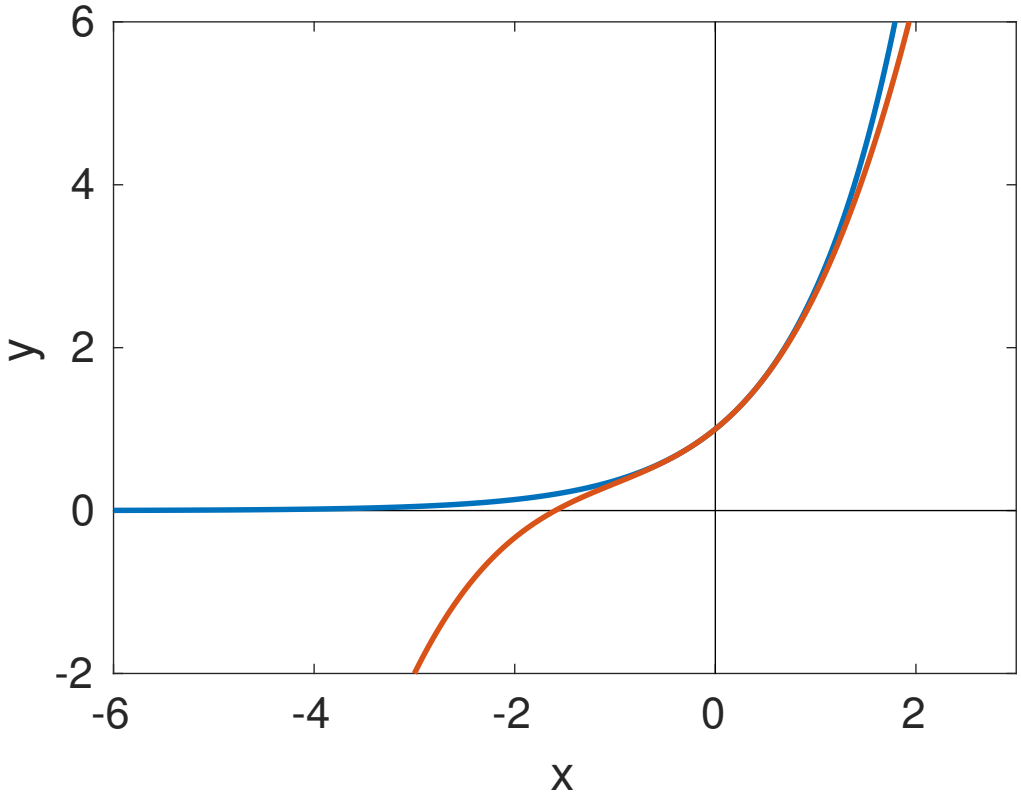
$$p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$




Si ha: $f(0) = p_2(0)$, $f'(0) = p_2'(0)$, $f''(0) = p_2''(0)$

Consideriamo la funzione $f(x) = e^x$ e il punto $x_0 = 0$.
Costruiamo:

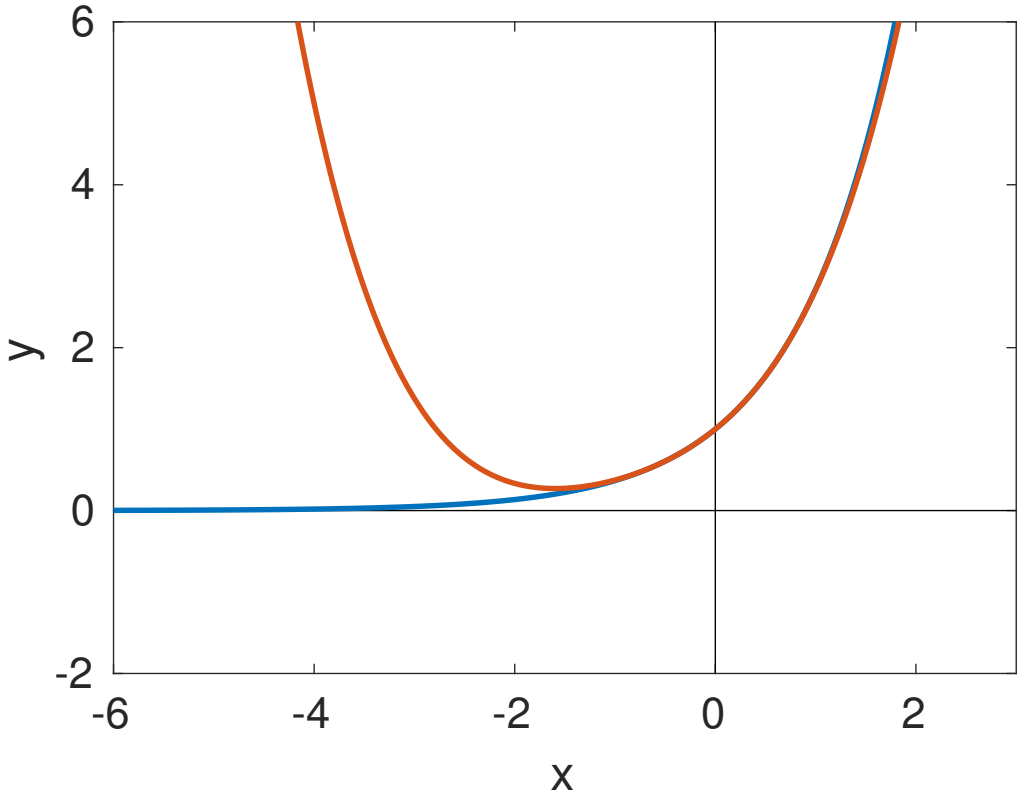
$$p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$$




Si ha: $f(0) = p_3(0)$, $f'(0) = p_3'(0)$, $f''(0) = p_3''(0)$,
$f^{(3)}(0) = p_3^{(3)}(0)$

Consideriamo la funzione $f(x) = e^x$ e il punto $x_0 = 0$.
Costruiamo:

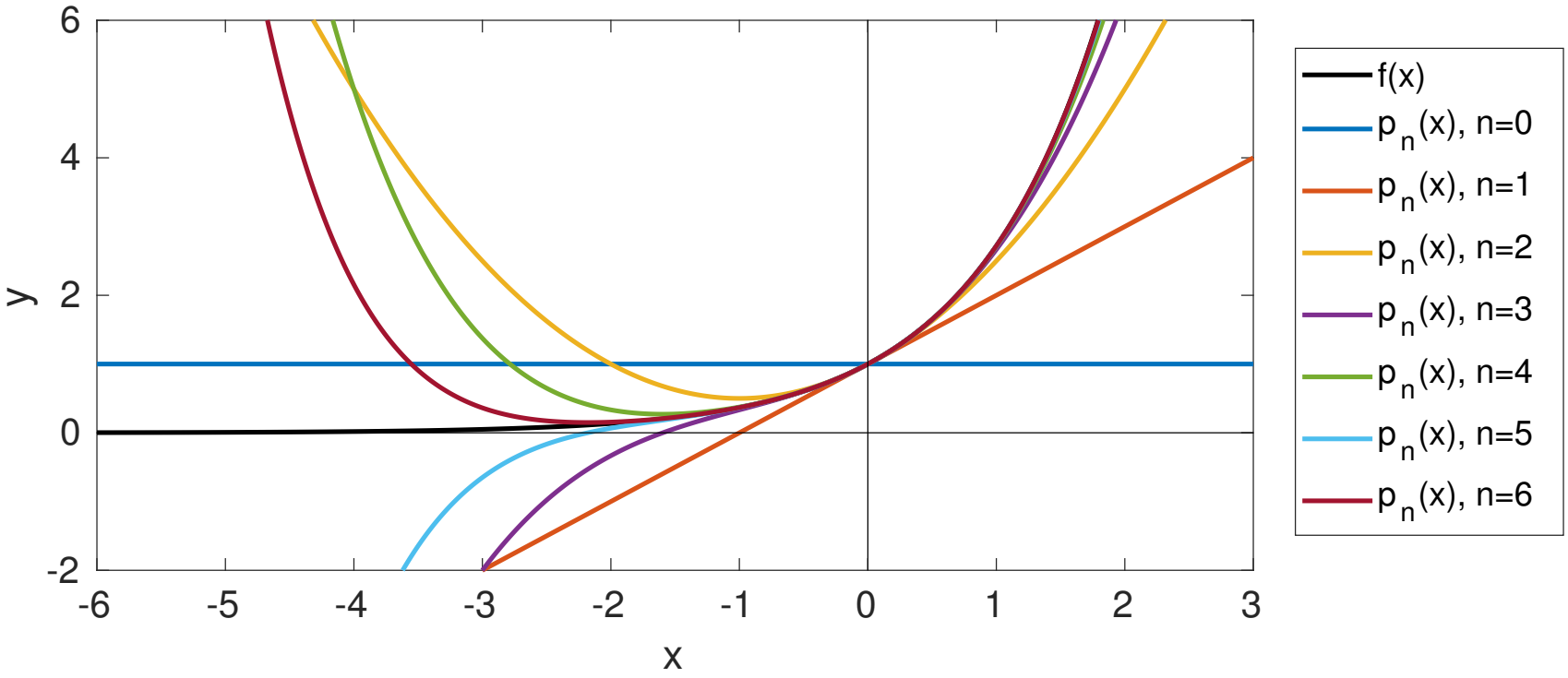
$$p_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$




Si ha: $f(0) = p_4(0)$, $f'(0) = p_4'(0)$, $f''(0) = p_4''(0)$,
$f^{(3)}(0) = p_4^{(3)}(0)$, $f^{(4)}(0) = p_4^{(4)}(0)$,

Consideriamo la funzione $f(x) = e^x$ e il punto $x_0 = 0$.
Costruiamo vari polinomi: $p_0(x)$, $p_1(x)$, ...., $p_n(x)$:

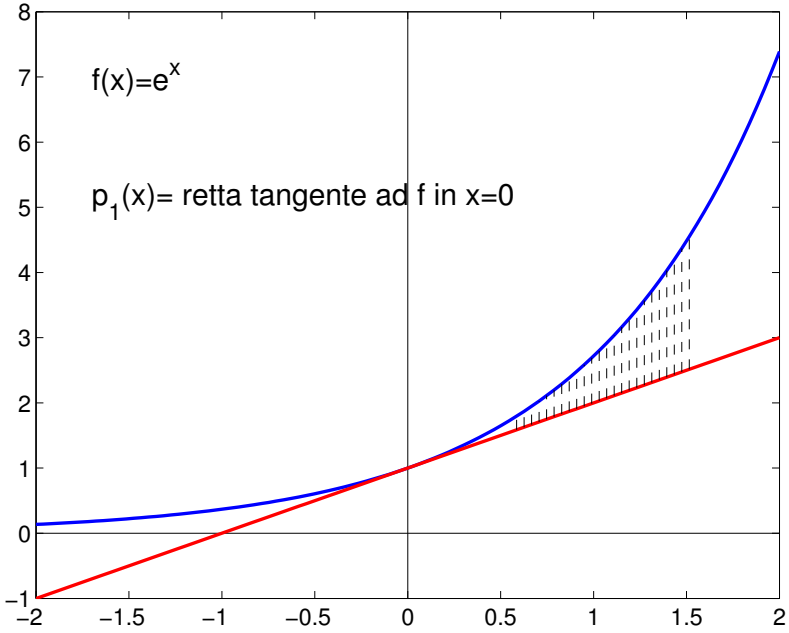
$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$



# Errore di approssimazione, resto di Taylor

Dati $f$, $x_0$, $n$ e $x \in I(x_0)$

QUANTO $p_n(x)$ APPROSSIMA BENE $f(x)$?




$r_n(x) = f(x) - p_n(x)$ è il RESTO di Taylor di ordine $n$ nel punto $x$

$r_n(x)$ è tanto più piccolo quanto più $x$ è vicino a $x_0$, cioè:

$$\lim_{x \to x_0} r_n(x) = 0$$

# Teorema (sviluppo di Taylor, con resto di Peano)

Teorema. Sia $f$ definita in $I(x_0)$. Sia $n \geq 0$ e sia $f$ continua e derivabile $n$ volte in $x_0$. Sia

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

il polinomio di Taylor di $f$ di grado $n$ centrato in $x_0$ e sia

$r_n(x) = f(x) - p_n(x)$ il resto di ordine $n$, con $x \in I(x_0)$.

Allora $\quad r_n(x) = o((x - x_0)^n)$ per $x \to x_0$.

Osservazione. Segue che

$$f(x) = p_n(x) + o((x - x_0)^n) \text{ per } x \to x_0.$$

$r_n(x) = o((x - x_0)^n)$ è detto resto nella forma di Peano

# Teorema (di Taylor, resto di Lagrange)

Teorema. Sia $f$ continua e derivabile $n$ volte in $x_0$ con derivata $n$-sima continua. Sia inoltre derivabile $n+1$ volte in $I(x_0) \setminus \{x_0\}$. Sia $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ il il polinomio di Taylor di $f$ di grado $n$ centrato in $x_0$, allora $\exists\ \xi$ tra $x$ e $x_0$:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \text{ e}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$r_n(x)$ è detto resto nella forma di Lagrange.

# Sviluppi di Maclaurin

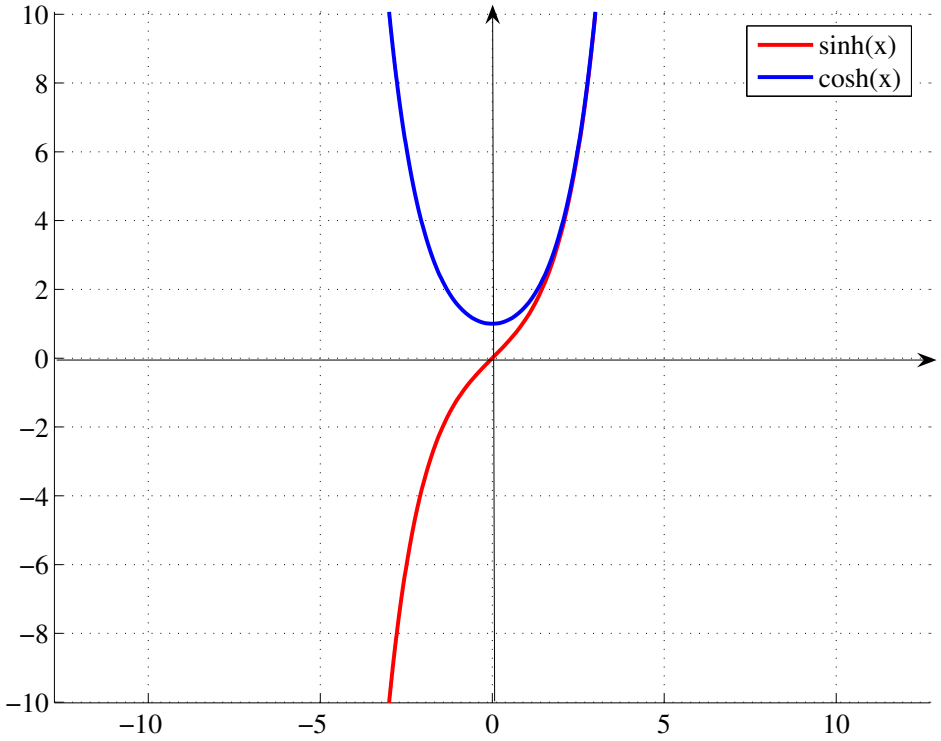
Se $x_0 = 0$ lo sviluppo di Taylor prende il nome di sviluppo di Maclaurin e diventa

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \end{aligned}$$

# Funzioni iperboliche

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



La relazione fondamentale tra sinh e cosh è:

$$\cosh^2(\theta) - \sinh^2(\theta) = 1 \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

$\sinh(\theta)$ e $\cosh(\theta)$ sono dette funzioni iperboliche perchè un punto $P = (x_P, y_P)$ del piano cartesiano con $x_P = \cosh(\theta)$ e $y_P = \sinh(\theta)$, al variare di $\theta$ appartiene all'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$.

Si ha: $D(\sinh(\theta)) = \cosh(\theta)$ e $D(\cosh(\theta)) = \sinh(\theta)$,
o equivalentemente:
$D(\sinh(x)) = \cosh(x)$ e $D(\cosh(x)) = \sinh(x)$

Inoltre, dalla definizione si ottiene:

$$\sinh(x) + \cosh(x) = e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

# Sviluppi di Maclaurin notevoli

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+2})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1})$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+2})$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2k+1})$$

dove

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \forall \alpha \in \mathbb{R},\ n \geq 1$$

Calcolare il limite: $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{1/3}-1}{\sin(x)}$ sfruttando i polinomi di Taylor.

Il limite deve essere calcolato per $x \to 0$, quindi posso usare gli sviluppi di MacLaurin.

$(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}x^2 + o(x^2)$

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/3}-1}{\sin(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}x^2 + o(x^2) - 1}{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}x + o(x)}{x - o(x)} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Canuto Tabacco, Cap. 7.

Esercizi: Calcolare il Polinomio di Taylor di grado 2 delle seguenti funzioni nell'intorno del punto $x_0$ riportato:

1. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$
2. $f(x) = \log(x)$, $x_0 = 2$
3. $f(x) = x\log(x)$, $x_0 = 1$
4. $f(x) = \tan(x)$, $x_0 = \pi/3$
5. $f(x) = e^{x^2}$, $x_0 = -1$

Esercizi: Si possono svolgere tutti i limiti che compaiono nei temi d'esame degli anni precedenti. La maggior parte di essi richiede l'uso dei polinomi di Taylor. Alcuni limiti richiedono anche l'impiego del Teorema di de l'Hôpital.