Teoremi sui limiti

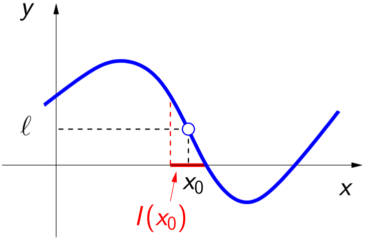
Quando non espressamente detto, intendiamo che:

- $f : dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ è punto di accumulazione per dom(f).

Teorema di unicità del limite. Supponiamo che f ammetta limite ℓ (finito o infinito) per $x \to x_0$. Allora f non ha altri limiti per $x \to x_0$.

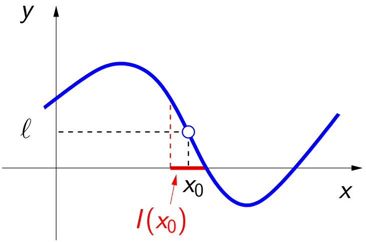
La dimostrazione è svolta a lezione. Una dimostrazione alternativa è riportata a pag. 93-94 del libro di testo (ed. Springer) e pag. 118 (ed Pearson).

Teorema di permanenza del segno. Supponiamo che esista $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Se $\ell > 0$, allora esiste un intorno $I(x_0)$ del punto x_0, tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$.



La dimostrazione è svolta a lezione. Una dimostrazione alternativa è riportata a pag. 94-95 del libro di testo (ed. Springer) e pag. 118 (ed. Pearson).

Corollario al teorema di permanenza del segno. Supponiamo che esista $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ e che esista un intorno $I(x_0)$ del punto x_0, tale che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$. Allora $\ell \geq 0$.



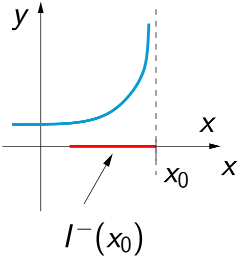
La dimostrazione è svolta a lezione. (Si veda pag. 95 del libro di testo (ed. Springer) e pag. 119 (ed. Pearson))

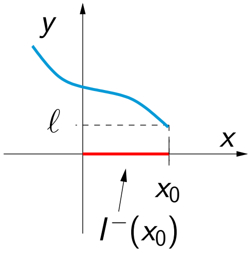
Limiti di funzioni monotone

Teorema. Sia f una funzione definita e monotona in un intorno sinistro $I^-(x_0)$ del punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, escluso al più il punto x_0 stesso.
Allora esiste finito o infinito $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e precisamente si ha:

Se f è crescente in $I^-(x_0) \Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{x \in I^-(x_0)} f(x)$

Se f è decrescente in $I^-(x_0) \Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \inf_{x \in I^-(x_0)} f(x)$



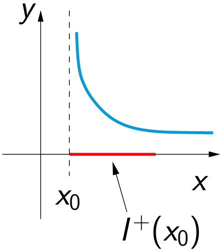


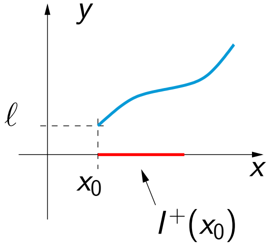
Limiti di funzioni monotone

Teorema. Sia f una funzione definita e monotona in un intorno destro $I^+(x_0)$ del punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, escluso al più il punto x_0 stesso. Allora esiste finito o infinito $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ e precisamente si ha:

Se f è decrescente in $I^+(x_0) \Rightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \sup_{x\in I^+(x_0)} f(x)$

Se f è crescente in $I^+(x_0) \Rightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \inf_{x\in I^+(x_0)} f(x)$





Un limite notevole

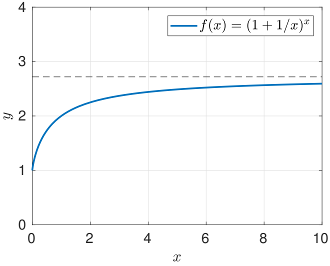
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Si dimostra grazie al teorema del limite di funzioni monotone.

Si riesce a provare che $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ è monotona crescente in $(0,+\infty)$, e che il sup del suo insieme immagine è $\sup_{x>0} f(x) = e$.

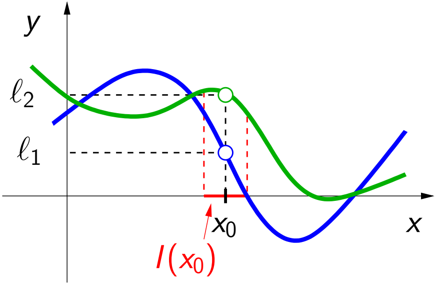
Per il teorema del limite di funzioni monotone si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sup_{x>0} f(x) = e$$



Primo Teorema del confronto.

Supponiamo che f ammetta limite $\ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ per $x \to x_0$ e la funzione g ammetta limite $\ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ per $x \to x_0$. Se esiste un intorno $I(x_0)$ di x_0 tale che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$, allora $\ell_1 \leq \ell_2$.



La dimostrazione è svolta a lezione. Una dimostrazione alternativa è riportata a pag. 96 del libro di testo (ed. Springer) e pag. 123 (ed. Pearson).

Secondo Teorema del confronto.

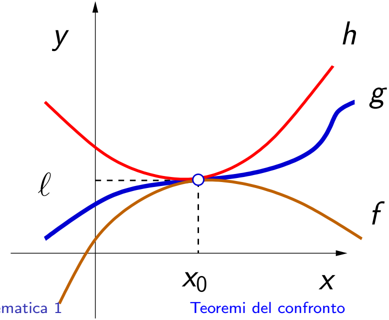
Siano date tre funzioni: f, g e h e supponiamo che esistano e siano uguali i limiti

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = \ell.$$

Se esiste un intorno $I(x_0)$ in cui siano definite le tre funzioni, tranne al più nel punto x_0, tale che

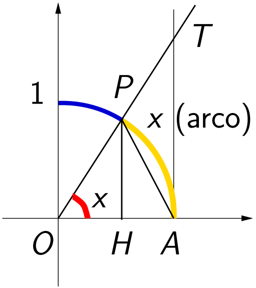
$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \qquad\qquad \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\},$$

allora si ha $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$.



Limite fondamentale $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Dim.



Lavoro con $x \geq 0$, osservo che $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ è pari.

Se l'angolo $\widehat{POA} = x$ allora l'arco $\overset{\frown}{AP}$ è lungo x, e $A(\overset{\frown}{OPA}) = \frac{x}{2}$.

Infatti

$\overset{\frown}{AP}: 2\pi r = x : 2\pi$, $\Rightarrow$ $\overset{\frown}{AP} = x \cdot r = x$;

$A(\overset{\frown}{OPA}) : \pi r^2 = x : 2\pi$, $\Rightarrow A(\overset{\frown}{OPA}) = \frac{x}{2}$

$$A(P\overset{\triangle}{O}A) = \frac{\overline{PH} \cdot \overline{OA}}{2} = \frac{\sin(x)}{2},$$

$$A(T\overset{\triangle}{O}A) = \frac{\overline{TA} \cdot \overline{OA}}{2} = \frac{\tan(x)}{2} \text{ e}$$

$A(P\overset{\triangle}{O}A) \leq A(\overset{\frown}{OPA}) \leq A(T\overset{\triangle}{O}A)$ ovvero $\frac{\sin(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan(x)}{2}$.

Moltiplicando $\frac{\sin(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan(x)}{2}$ per $\frac{2}{\sin(x)}$ si ha

$$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

e invertendo il tutto:

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1.$$

Per il secondo teorema del confronto, facendo tendere x a 0:

$\lim_{x \to 0} \cos(x) = 1, \qquad \lim_{x \to 0} 1 = 1$ e quindi $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$ $\square$

Funzione limitata

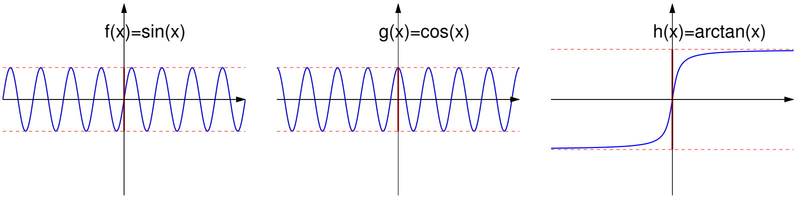
Sia $f : \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Def. Diciamo che f è limitata (sul suo dominio) se il suo insieme immagine $\mathrm{im}(f)$ è un insieme limitato in $\mathbb{R}$.

Def. Diciamo che f è limitata inferiormente (sul suo dominio) se $\mathrm{im}(f)$ è un insieme limitato inferiormente in $\mathbb{R}$.

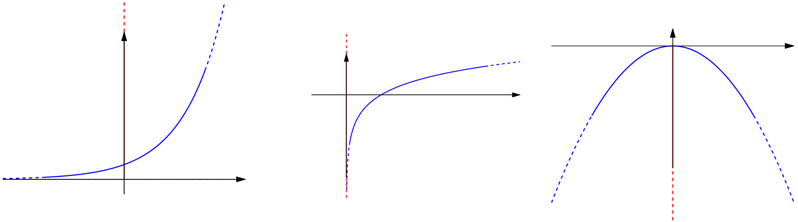
Def. Diciamo che f è limitata superiormente (sul suo dominio) se $\mathrm{im}(f)$ è un insieme limitato superiormente in $\mathbb{R}$.

Esempi. $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)$, $h(x) = \arctan(x)$ sono funzioni limitate. Infatti $\mathrm{im}(f) = \mathrm{im}(g) = [-1, 1]$, $\mathrm{im}(h) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ sono tutti insiemi limitati



Esempi di funzioni NON limitate.

$f(x) = e^x$, è solo limitata inferiormente, $\text{im}(f) = \mathbb{R}^+$
$g(x) = \log(x)$ non è limitata, $\text{im}(g) = \mathbb{R}$,
$h(x) = -x^2$ è solo limitata superiormente, $\text{im}(h) = (-\infty, 0]$.

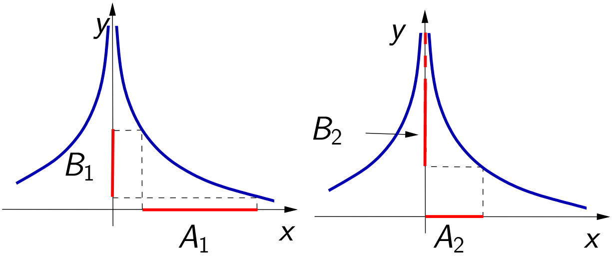


$f(x) = e^x$ $g(x) = \log(x)$ $h(x) = -x^2$

Funzione limitata su un insieme $A \subseteq dom(f)$

Sia $A \subseteq \text{dom}(f)$ e $B = f(A) = \{y = f(x), \text{ con } x \in A\}$ (insieme immagine di A mediante f).

Def. Diciamo che f è limitata su A se B è un insieme limitato in $\mathbb{R}$.



f è limitata su A_1. B_1 è un insieme limitato.

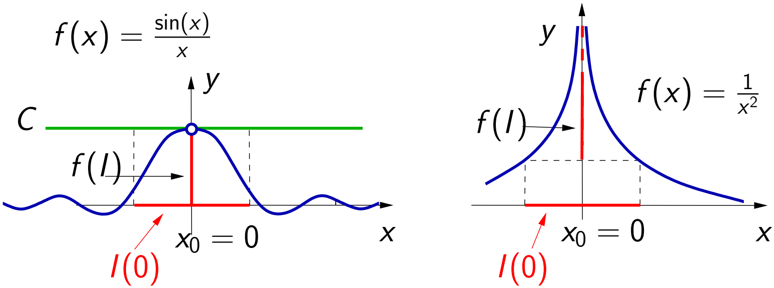
f non è limitata su A_2. Si ha $\sup\limits_{x \in A_2} f(x) = +\infty$ e B_2 non è un limitato superiormente.

Funzione limitata in un intorno di un punto x_0

Sia f una funzione definita in un intorno del punto x_0 tranne al più nel punto x_0.

Def. Una funzione f è limitata in un intorno $I(x_0)$ del punto x_0, se esiste una costante $C > 0$ tale che

$$|f(x)| \leq C, \qquad \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}.$$



Entrambe le funzioni non sono definite in $x_0 = 0$, quella di sinistra è limitata in $I(0) \setminus \{0\}$, quella di destra no.

OSSERVAZIONE

Dire che f è limitata nell'intorno $I(x_0)$ NON vuole dire che esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$

Esempio. Sia $f(x) = \sin(x)$. L'insieme immagine di f è $\text{im}f = [-1, 1]$ è un insieme limitato (ammette sia maggioranti che minoranti), quindi f è limitata su tutto il suo dominio, cioè su $\mathbb{R}$.
Consideriamo anche la seconda definizione data.
Abbiamo $-1 \leq f(x) \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$, quindi possiamo dire che $|f(x)| \leq C$ $\forall x \in \mathbb{R}$ con $C = 1$.

Quindi f è limitata in un intorno di $x_0 = +\infty$.

Tuttavia $\boxed{\nexists \lim_{x \to +\infty} f(x)}$

Infatti f continua a oscillare e la definizione di limite non è soddisfatta per alcun valore di ℓ. (si veda pag. 16 di limiti1.pdf).

Corollario al II thm del confronto

Def. Se $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, si dice che g è infinitesima per $x \to x_0$.

Teorema. Sia f una funzione limitata in un intorno di x_0 e sia g una funzione infinitesima per $x \to x_0$. Allora $\lim_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = 0$, ovvero la funzione prodotto fg è infinitesima per $x \to x_0$.

Es. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$.

$f(x) = \sin(x)$ è limitata: $|\sin(x)| \leq 1$ e $g(x) = \dfrac{1}{x}$ è tale che

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Allora $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$.

Riferimenti bibliografici:
Canuto-Tabacco (ed. Pearson): Cap. 5
Canuto-Tabacco (ed. Springer): Cap. 4