Operazioni nella retta reale estesa

La **retta reale estesa** è $\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\} = [\infty, +\infty]$.

Definiamo le operazioni su $\overline{\mathbb{R}}$ pensando che le quantità che entrano in gioco siano il risultato di limiti.

Somma

$$\begin{array}{rrr} \ell + (+\infty) = +\infty & \ell + (-\infty) = -\infty & \forall \ell \in \mathbb{R} \\ (+\infty) + (+\infty) = +\infty & (-\infty) + (-\infty) = -\infty & \end{array}$$

Prodotto

$$\begin{array}{rrr} \ell \cdot (+\infty) = +\infty, & \ell \cdot (-\infty) = -\infty & \forall \ell \in \mathbb{R}^+ \\ \ell \cdot (+\infty) = -\infty, & \ell \cdot (-\infty) = +\infty & \forall \ell \in \mathbb{R}^- \\ (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty, & (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty, & (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty \end{array}$$

Divisione

$$\frac{\ell}{+\infty} = \frac{\ell}{-\infty} = 0, \qquad \forall \ell \in \mathbb{R}$$

$$\frac{+\infty}{\ell} = +\infty, \quad \frac{-\infty}{\ell} = -\infty \quad \forall \ell \in \mathbb{R}^+$$

$$\frac{+\infty}{\ell} = -\infty, \quad \frac{-\infty}{\ell} = +\infty \quad \forall \ell \in \mathbb{R}^-$$

$$\frac{\ell}{0} = \infty \quad \forall \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Non sono definite le seguenti operazioni:

$$(+\infty) + (-\infty), \qquad (\pm\infty) \cdot 0, \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \frac{0}{0}$$

$$\infty^0, \qquad 0^0, \qquad 1^\infty$$

Sono dette forme indeterminate perché il risultato non è sempre lo stesso. Esse devono essere indagate e risolte caso per caso, con opportune regole. Ad esempio, $(+\infty) + (-\infty)$ potrebbe dare come risultato $\ell \in \mathbb{R}$, oppure $+\infty$, oppure $-\infty$, a seconda di cosa rappresentano i vari "infiniti".

Algebra dei limiti

Teorema. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, allora, quando l'espressione a secondo e terzo membro è definita (non si hanno forme indeterminate), si ha

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_1 + \ell_2$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_1 - \ell_2$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = (\lim_{x\to x_0} f(x)) \cdot (\lim_{x\to x_0} g(x)) = \ell_1 \cdot \ell_2$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2} \qquad (g(x) \neq 0,\ \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\})$$

Esempio 1

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\log(x)+\frac{1}{x}\right) \stackrel{?}{=} \lim_{x\to+\infty}\log(x)+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = +\infty + 0 = +\infty$$

OK, abbiamo applicato l'algebra dei limiti correttamente.

Esempio 2

$$\lim_{x\to+\infty}(\log(x)-x) \stackrel{?}{=} \lim_{x\to+\infty}\log(x) - \lim_{x\to+\infty} x = +\infty - \infty$$

È una forma indeterminata, l'algebra dei limiti non ci consente di risolvere il limite.

Esempio 3

$$\lim_{x\to 0+} x\log(x) \overset{?}{=} \lim_{x\to 0+} x \cdot \lim_{x\to 0+} \log x = 0 \cdot (-\infty)$$

È una forma indeterminata, l'algebra dei limiti non ci consente di risolvere il limite.

Esempio 4

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2} \overset{?}{=} \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)}{\lim\limits_{x\to+\infty} x^2} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

È una forma indeterminata, l'algebra dei limiti non ci consente di risolvere il limite.

Infiniti e infinitesimi

Sia f una funzione definita in un intorno del punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, tranne eventualmente in x_0 (cioè $x0$ è di accumulazione per $\text{dom}(f)$).

Una funzione f si dice **infinitesima** per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0,$$

Es. $f(x) = e^x$ è infinitesima per $x \to -\infty$.

mentre diciamo che f è **infinita** per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

Es. $f(x) = e^x$ è infinita per $x \to +\infty$.

Confronto di infiniti (1)

Siano f e g due funzioni infinite per $x \to x_0$, con $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Def. f ha **ordine di infinito superiore** rispetto a g per $x \to x_0$ sse $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Esempio 1. $f(x) = x^2$ ha ordine di infinito superiore rispetto a $g(x) = x$ per $x \to +\infty$, abbiamo infatti

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

Esempio 2. $f(x) = e^{2x} - e^x$ ha ordine di infinito superiore rispetto a $g(x) = e^x$ per $x \to +\infty$, abbiamo infatti

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} - e^x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} e^x \frac{e^x - 1}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} (e^x - 1) = +\infty$$

Confronto di infiniti (2)

Def. f ha **ordine di infinito inferiore** rispetto a g per $x \to x_0$ sse $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Esempio 1. $f(x) = x^2$ ha ordine di infinito inferiore rispetto a $g(x) = x^4$ per $x \to +\infty$, abbiamo infatti

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Esempio 2. $f(x) = e^x$ ha ordine di infinito inferiore rispetto a $g(x) = e^{3x}$ per $x \to +\infty$, abbiamo infatti

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^{3x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{2x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Confronto di infiniti (3)

Def. f ha lo **stesso ordine di infinito** di g per $x \to x_0$ sse $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \neq 0$, con $\ell \in \mathbb{R}$.

Esempio 1. $f(x) = x + 1$ ha lo stesso ordine di infinito di $g(x) = x$ per $x \to +\infty$, abbiamo infatti

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$

Esempio 2. $f(x) = 2e^x$ ha lo stesso ordine di infinito di $g(x) = e^x + 2$ per $x \to +\infty$, abbiamo infatti

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2e^x}{e^x + 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2e^x}{e^x(1 + 2e^{-x})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{1 + 2e^{-x}} = \frac{2}{1+0} = 2$$

Riferimenti bibliografici

Canuto-Tabacco (ed Pearson):
5.2 e 5.4 (operazioni in $\overline{\mathbb{R}}$, algebra dei limiti e forme indeterminate)

Canuto-Tabacco (ed Springer):
4.1.3 (operazioni in $\overline{\mathbb{R}}$, algebra dei limiti e forme indeterminate)