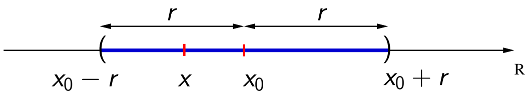
LIMITI DI FUNZIONI

Intorni

Denotiamo $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$.

Def. Siano $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{R}^+$. Chiamiamo **intorno** di centro x_0 e raggio r l'intervallo aperto e limitato

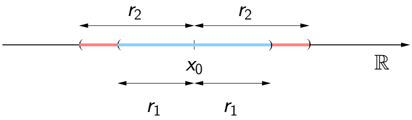
$$I_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$$



Ricordando che $|x - x_0| = |x_0 - x|$ è la distanza di x da x_0.
$|x - x_0| < r$ vuol dire che la distanza di x da x_0 è minore di r, ovvero $x \in I_r(x_0)$.

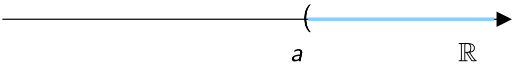
Famiglia di intorni

Se fisso $x_0 \in \mathbb{R}$ e faccio variare $r \in \mathbb{R}^+$, ottengo la famiglia degli intorni di centro x_0. In particolare se $r_1 < r_2$ si ha $I_{r_1}(x_0) \subset I_{r_2}(x_0)$



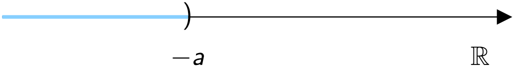
Def. $\forall a \in \mathbb{R}^+$, chiamiamo **intorno di** $+\infty$ di estremo inferiore a, l'intervallo aperto e superiormente illimitato

$$I_a(+\infty) = (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$



Analogamente, l'**intorno di** $-\infty$ di estremo superiore $-a$ è

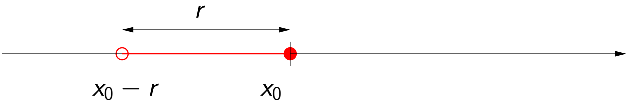
$$I_a(-\infty) = (-\infty, -a) = \{x \in \mathbb{R} : x < -a\}$$



Intorni destri e sinistri

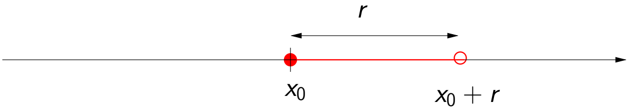
Def. **Intorno sinistro** di centro x_0 e raggio $r > 0$ è l'intervallo semiaperto a sinistra e limitato

$$I_r^-(x_0) = (x_0 - r, x_0]$$



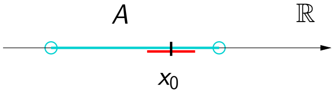
Def. **Intorno destro** di centro x_0 e raggio $r > 0$ è l'intervallo semiaperto a destra e limitato

$$I_r^+(x_0) = [x_0, x_0 + r)$$

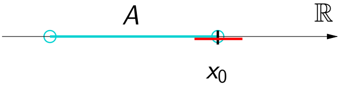


Punto di accumulazione

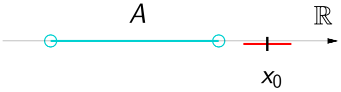
Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ è un **punto di accumulazione per** A se in ogni intorno di x_0 cade almeno un punto di A diverso da x_0.



x_0 è punto di accumulazione per A

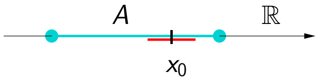


x_0 è punto di accumulazione per A



x_0 NON è punto di accumulazione per A

Punto di accumulazione



x_0 è punto di accumulazione per A

x_0 è punto di accumulazione per A

x_0 NON è punto di accumulazione per A

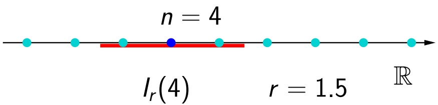
Se $A = (a, b)$ è un intervallo aperto di $\mathbb{R}$, allora tutti i punti di accumulazione per A sono in $[a, b]$.
Se $A = [a, b]$ è un intervallo chiuso di $\mathbb{R}$, allora tutti i punti di accumulazione per A sono in $[a, b]$.

Se $A \equiv \mathbb{R}$, allora un qualsiasi punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (finito o infinito) è di accumulazione per $\mathbb{R}$.

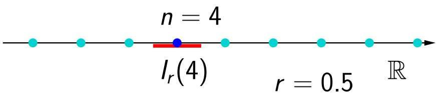
Sia $A = \mathbb{N}$. L'unico punto di accumulazione per $\mathbb{N}$ è $+\infty$

(Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ è un **punto di accumulazione per** A se in ogni intorno di x_0 cade almeno un punto di A diverso da x_0.)

Consideriamo $n = 4$. Possiamo costruire molti intorni $I_r(4)$ che contengono altri numeri naturali, ad esempio:

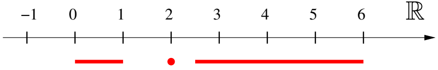


ma anche altrettanti intorni $I_r(4)$ che non contengono alcun altro numero naturale oltre a $n = 4$, ad esempio:



Punti di accumulazione e punti isolati

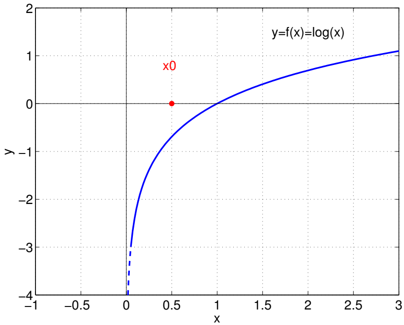
CONCLUSIONE: $n = 4$ non è di accumulazione per $\mathbb{N}$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, n non può essere di accumulazione per $\mathbb{N}$.
Def. Un punto di $A \subset \mathbb{R}$ che non è di accumulazione per A è detto punto isolato.
Esempio $A = (0, 1) \cup \{2\} \cup (2.5, 6)$. $x = 2$ è un punto isolato in A.



Quindi: tutti i numeri naturali sono punti isolati in $\mathbb{N}$, l'unico punto di accumulazione per $\mathbb{N}$ è $+\infty$.

Sia $f(x) = \log(x)$. Determinare l'insieme dei punti di accumulazione del dominio di f.

$A = \mathrm{dom}(f) = (0, +\infty)$.
L'insieme dei punti di accumulazione di A è $[0, +\infty]$.



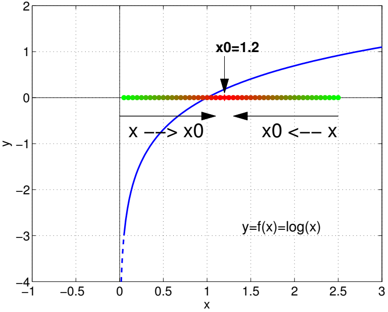
Limiti di funzione

Sia $f : \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$.

Sia x_0 un punto di accumulazione per $\mathrm{dom}(f)$.

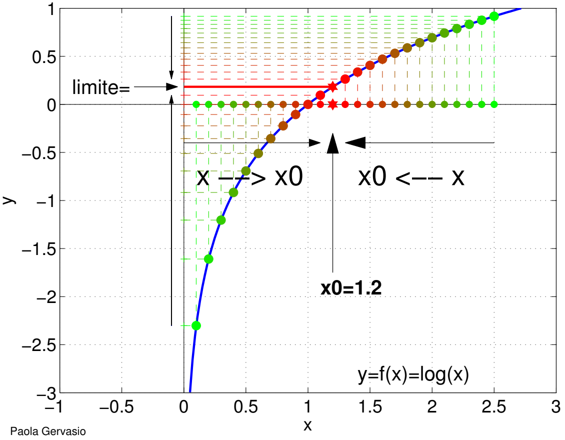
Scrivere $x \to x_0$ vuol dire che stiamo prendendo dei punti x in un intorno di x_0 via via sempre più vicini a x_0, sia da destra che da sinistra e si dice

x tende a x_0

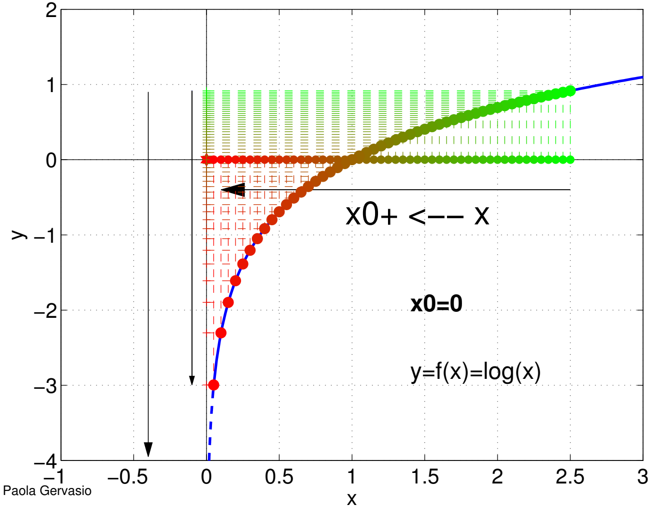


xtox0_dinamico.m

Mi interessa sapere come si comporta la funzione $y = f(x)$ (ovvero come si comportano le **ordinate dei punti del grafico**) quando $x \to x_0$



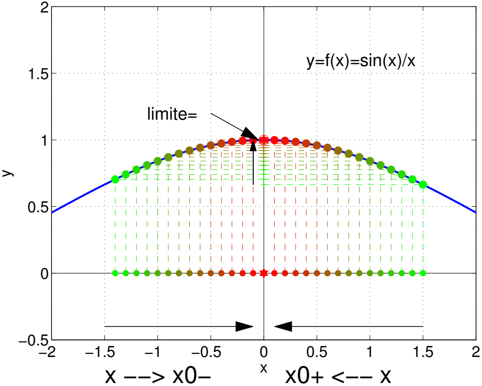
`limite_log_dinamico.m`



Per $x \to 0^+$ (cioè $x \to 0$ da dx), $f(x) = log(x) \to -\infty$

`limite_log_0_dinamico.m`

Altri esempi.

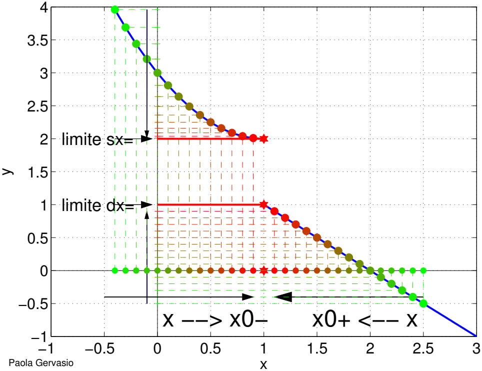


dom$(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. $f(x)$ non è definita in $x_0 = 0$, tuttavia posso vedere come si comporta $f(x)$ quando $x \to 0^-$ e $x \to 0^+$.

Per $x \to 0^-$, $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} \to 1$, per $x \to 0^+$, $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} \to 1$.

`limite_sinxsux_dinamico.m`

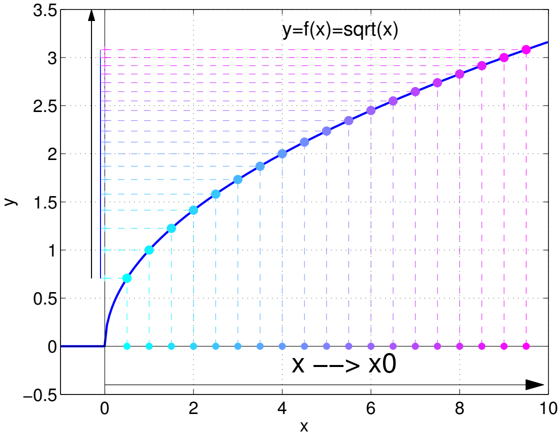
$$g(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + 2 & x < 1 \\ -x + 2 & x > 1, \end{cases} \qquad \text{non è definita in } x_0 = 1$$



Per $x \to 1^+$, $g(x) \to 1$, per $x \to 1^-$ (cioè $x \to 1$ da sx), $g(x) \to 2$.

`limite_fsalto_dinamico.m`

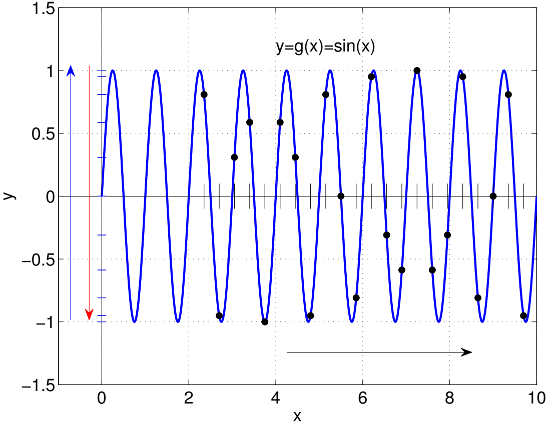
Posso anche chiedermi come si comporta $f(x)$ quando $x \to +\infty$



Per $x \to +\infty$, $f(x) = \sqrt{x} \to +\infty$

`limite_sqrt_infinito.m`

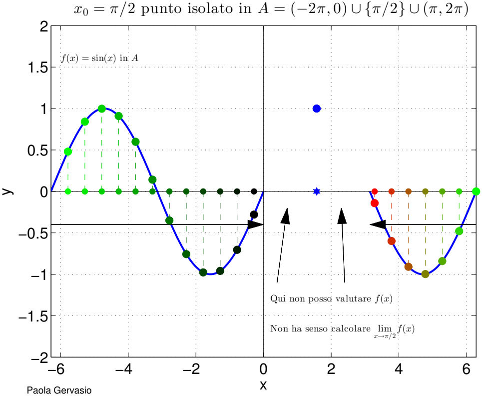
Mi chiedo come si comporta $g(x) = \sin(2\pi x)$ quando $x \to +\infty$



Per $x \to +\infty$, $g(x)$ non tende ad alcun valore, ma continua ad oscillare

`limite_sin_infinito.m`

Sia $f(x) = \sin(x)$ definita in $A = (-2\pi, 0) \cup \{\pi/2\} \cup (\pi, 2\pi)$.
$x_0 = \pi/2$ è punto isolato per A.
Non ha senso chiedersi cosa succede alla funzione quando $x \to \pi/2$ perché f non è definita in un intorno di $x_0 = \pi/2$



CONCLUSIONE: ha senso studiare il comportamento di $f(x)$ per $x \to x_0$ solo se x_0 è un punto di accumulazione per il dom(f).

`limite_f_isolato.m`

Limite di funzione al finito

Sia f una funzione definita in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$ tranne eventualmente nel punto x_0.
Questo equivale a dire: Sia x_0 un punto di acc. per dom(f).

N.B. Mi disinteresso del valore di $f(x)$ nel punto x_0.
Nel punto x_0 la f potrebbe assumere qualsiasi valore o potrebbe non essere definita (cioè x_0 può non appartenere a dom(f)).

Voglio guardare cosa succede alla funzione (cioè alle y) per x molto prossimo a x_0.

Definizione di limite con $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}$

Def. Si dice che f **ha limite finito** $\ell \in \mathbb{R}$ **(o tende ad** ℓ**) per** x **tendente a** x_0 e si scrive

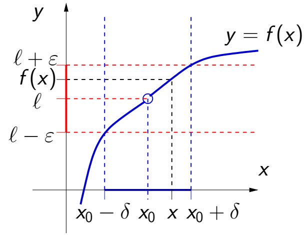
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

se

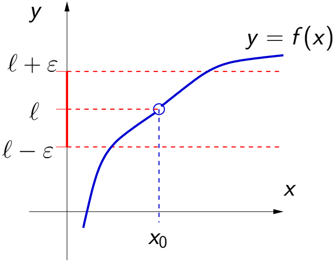
$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in \mathrm{dom}(f) : \ 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

o equivalentemente (secondo la terminologia degli intorni)

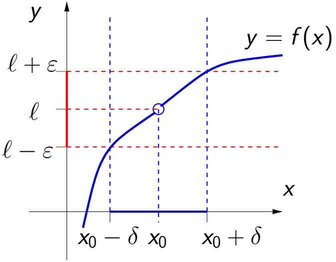
$$\forall I_\varepsilon(\ell) \ \ \exists I_\delta(x_0) : \ \forall x \in \mathrm{dom}(f) \cap I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \ \Rightarrow \ f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$$



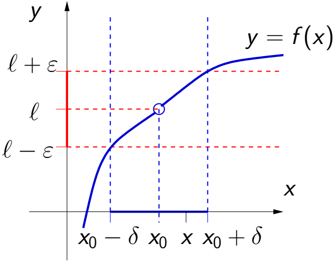
1. $\forall \varepsilon > 0$ $(\forall I_\varepsilon(\ell))$



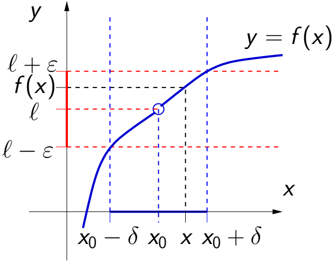
2. $\exists \delta > 0$: $(\exists I_\delta(x_0))$



3. $\forall x \in \mathrm{dom}(f)$: $0 < |x - x_0| < \delta$
$(\forall x \in \mathrm{dom}(f)$: $x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$



4. $\Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$
$(f(x) \in I_\varepsilon(\ell))$

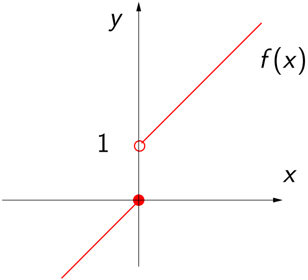


Limite destro e limite sinistro

Consideriamo la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 0 \\ x+1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$\text{dom}(f) = \mathbb{R}$



Per $x \to 0^-$ le ordinate $y = f(x)$ tendono a 0,
per $x \to 0^+$ le ordinate $y = f(x)$ tendono a 1
cosa è $\lim_{x\to 0} f(x)$?
Non si può parlare di $\lim_{x\to 0} f(x)$.
Bisogna specificare se $x \to 0^-$ (da sinistra) o $x \to 0^+$ (da destra).

`limite_def.m`

Limite sinistro

Def. Sia f una funzione definita in un intorno sinistro di x_0, tranne eventualmente in x_0 (x_0 è punto di accumulazione per $\mathrm{dom}(f)$).
f ha limite sinistro in x_0 uguale a ℓ

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in \mathrm{dom}(f), \ 0 < x_0 - x < \delta \ \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

oppure se

$$\forall I_\varepsilon(\ell) \ \exists I_\delta^-(x_0) : \ \forall x \in \mathrm{dom}(f), x \in I_\delta^-(x_0) \setminus \{x_0\} \ \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$$

L'intorno completo $I_\delta(x_0)$ della definizione originaria di limite è qui sostituito dall'intorno sinistro $I_\delta^-(x_0)$.

Limite destro

Def. Sia f una funzione definita in un intorno destro di x_0, tranne eventualmente in x_0 (x_0 è punto di accumulazione per $\mathrm{dom}(f)$).
f ha limite destro in x_0 uguale a ℓ

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in \mathrm{dom}(f), \ 0 < x - x_0 < \delta \ \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

oppure se

$$\forall I_\varepsilon(\ell) \ \exists I_\delta^+(x_0) : \ \forall x \in \mathrm{dom}(f), x \in I_\delta^+(x_0) \setminus \{x_0\} \ \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$$

Proposizione

Sia f una funzione definita in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$, tranne eventualmente nel punto x_0 (cioè x_0 è punto di accumulazione per $\mathrm{dom}(f)$).

La funzione f ha limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ per $x \to x_0$ se e solo se esistono e sono uguali ad ℓ il limite destro ed il limite sinistro di f in x_0, ovvero:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x),\ \exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) \text{ e } \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$$

Esempio. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 0 \\ x+1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

ha:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \quad \nexists \lim_{x \to 0} f(x)$$

Abbiamo limite destro, limite sinistro, ma non esiste il limite completo

Definizione di limite con $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\ell = +\infty$

Def. Si dice che f **ha limite** $+\infty$ **(o tende ad** $+\infty$**) per** x **tendente a** x_0 e si scrive

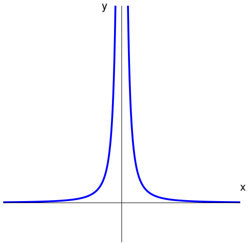
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

se

$$\forall A > 0, \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in \mathrm{dom}(f) : \ 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow f(x) > A$$

o equivalentemente (secondo la terminologia degli intorni)

$$\forall I_A(+\infty) \ \ \exists I_\delta(x_0) : \ \forall x \in \mathrm{dom}(f) \cap I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \ \Rightarrow \ f(x) \in I_A(+\infty)$$



Definizione di limite con $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\ell = -\infty$

Def. Si dice che f **ha limite** $-\infty$ **(o tende ad** $+\infty$**) per** x **tendente a** x_0 e si scrive

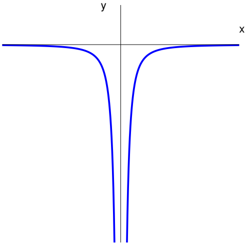
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

se

$$\forall A > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in \mathrm{dom}(f) :\ 0 < |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow f(x) < -A$$

o equivalentemente (secondo la terminologia degli intorni)

$$\forall I_A(-\infty)\ \ \exists I_\delta(x_0) :\ \forall x \in \mathrm{dom}(f) \cap I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}\ \Rightarrow\ f(x) \in I_A(-\infty)$$



Limiti di funzioni a $+\infty$

Consideriamo una funzione $y = f(x)$ reale a variabile reale, di dominio $D \subseteq \mathbb{R}$. Sia f definita in un intorno di $+\infty$ (cioè $+\infty$ è punto di accumulazione per $\mathrm{dom}(f)$).

Def. La funzione f tende al limite $\ell \in \mathbb{R}$ per x tendente a $+\infty$ e si scrive

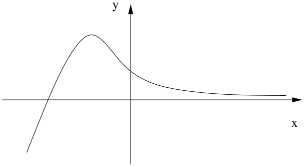
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell,$$

se (con $\varepsilon, B \in \mathbb{R}$)

$$\forall I_\varepsilon(\ell),\ \exists I_B(+\infty) :\ \forall x \in \mathrm{dom}(f),\quad x \in I_B(+\infty) \ \Rightarrow\ f(x) \in I_\varepsilon(\ell),$$

oppure:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B \geq 0 :\ \forall x \in \mathrm{dom}(f) \text{ con } x > B \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$



Sia ancora f definita in un intorno di $+\infty$.

Def. La funzione f tende al limite $+\infty$ per x tendente a $+\infty$ e si scrive

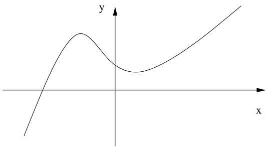
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

se (con $A, B \in \mathbb{R}$)

$$\forall I_A(+\infty), \quad \exists I_B(+\infty) : \ \forall x \in \mathrm{dom}(f), \quad x \in I_B(+\infty) \ \Rightarrow \ f(x) \in I_A(+\infty)$$

oppure

$$\forall A > 0, \ \exists B \geq 0 : \ \forall x \in \mathrm{dom}(f) \text{ con } x > B \ \Rightarrow \ f(x) > A,$$



Sia ancora f definita in un intorno di $+\infty$.

Def. La funzione f tende al limite $-\infty$ per x tendente a $+\infty$ e si scrive

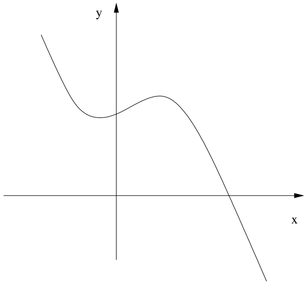
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty,$$

se (con $A, B \in \mathbb{R}$)

$$\forall I_A(-\infty),\ \exists I_B(+\infty) :\ \forall x \in \mathrm{dom}(f),\quad x \in I_B(+\infty)\ \Rightarrow\ f(x) \in I_A(-\infty)$$

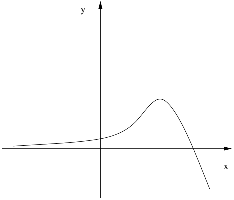
oppure:

$$\forall A > 0,\ \exists B \geq 0 :\ \forall x \in \mathrm{dom}(f) \text{ con } x > B\ \Rightarrow\ f(x) < -A,$$

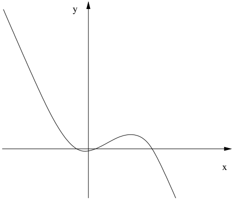


Sia f una funzione definita in un intorno di $-\infty$.

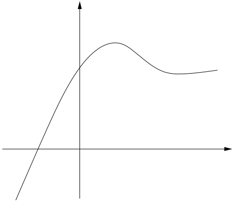
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$



$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$



$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$



$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$$
$$\forall I_\varepsilon(\ell) \exists I_B(-\infty) : \ \forall x \in \mathrm{dom}(f) \cap I_B(-\infty) \ \Rightarrow \ f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$
$$\forall I_A(+\infty) \ \exists I_B(-\infty) : \ \forall x \in \mathrm{dom}(f) \cap I_B(-\infty) \ \Rightarrow \ f(x) \in I_A(+\infty)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$\forall I_A(-\infty) \ \exists I_B(-\infty) : \ \forall x \in \mathrm{dom}(f) \cap I_B(-\infty) \ \Rightarrow \ f(x) \in I_A(-\infty)$$

Definizione generale di limite nella terminologia degli intorni

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

1. Per ogni intorno del limite ℓ,
2. esiste un intorno del punto di accumulazione x_0,
3. tale che per ogni x che sta nel dominio di f e contemporaneamente nell'intorno del punto di accumulazione, eccetto eventualmente il punto x_0 stesso,
4. allora $f(x)$ cade nell'intorno del limite.

Questa definizione vale per ogni $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e per ogni $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Riferimenti bibliografici

Canuto-Tabacco, ed Pearson: Sect. 4.1, 4.3.1, 4.3.3.
Canuto-Tabacco, ed Springer: Sect. 3.1, 3.3.1, 3.3.3.
Esercizi Si considerino le funzioni elementari viste finora, valutare graficamente i limiti di tali funzioni agli estremi del dominio.
Esempio Sia $y = f(x) = 1/x$. $\text{dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
Bisogna valutare $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ osservando il grafico di $f(x)$.